ملخصات شوم

نظريات ومسائل

فى

المصفوفات

تأليف

الدكتور فرانك آيرز

أستاذ سابق ، رئيس قسم الرياضيات
كلية ديكنسون

ترجمة

نخبة من الأساتذة المتخصصين

مراجعة

الدكتور فاروق البتانونى

قسم الرياضيات - جامعة المنصورة
جمهورية مصر العربية



دار ماكجروهيل للنشر



الدار الدولية للنشر والتوزيع

مقدمة الناشر

المعرفة هى أصل الحضارة ،
والكلمة هى مصدر المعرفة ،
والكلمة المطبوعة هى أهم مكون فى هذا المصدر .

وقد كانت الكلمة المطبوعة ولاتزال أهم وسائل الثقافة والإعلام وأوسعها انتشاراً وأبقاها أثراً ، حيث حملت إلينا حضارات الأمم عبر آلاف السنين لتتولى الأجيال المتلاحقة صياغة حضاراتها وإضاءة الطريق بنور العلم والمعرفة .

والكلمة تبقى مجرد فكرة لدى صاحبها حتى تتاح لها فرصة نشرها وترجمتها إلى لغات الآخرين ثم توزيعها ، وذلك وحده هو الذى يكفل لها أداء رسالتها .

وعالم الكتب العلمية عالم رحب ممتد الآفاق ، متسع الجنبات ، والعلم لا وطن له ولا حدود ، ويوم يحظى القارىء العربى بأحدث الكتب العلمية باللغة العربية لهو اليوم الذى تتطلع له الأمة العربية جمعاء .

والدار الدولية للنشر والتوزيع تشعر بالرضا عن مساهمتها فى هذا المجال بتقديم الطبعات العربية للكتب العلمية الصادرة عن دار ماكجروهيل للنشر بموجب الاتفاق المبرم معها ، مستهدفة توفير احتياجات القارىء العربى استاذاً وباحثاً وممارساً .

ومن جانب آخر فنحن نمد يدنا إلى الجامعات العربية والمراكز العلمية والمؤسسات والهيئات الثقافية للتعاون معنا فى إصدار طبعات عربية حديثة من الكتب والمراجع العلمية تخدم التقدم العلمى والحضارى للقارىء العربى

والله ولى التوفيق

محمد وفائى كامل
مدير عام
الدار الدولية للنشر والتوزيع

مقدمة الطبعة العربيــة

يؤكد تاريخ العلوم أن الحضارة الحديثة تدين بازدهارها أساسا لحضارة العربية الإسلامية بما نقلت عنها من أصول العلم وتفرعاته . كما أن الأمة العربية تواجه اليوم تحديا بأن تطوع لغتها لتشمل وتستوعب كل النظريات والاكتشافات سريعة التطور والتجدد ، مما يساعدها على استعادة مركزها الذى تخلفت عنه زمناً طويلا .

ولا شك أن المكتبة العربية تفتقر كثيرا إلى الكتب العلمية فى مختلف فروع العلم النظرية والتطبيقية والتكنولوجية ، كما أن الدراسة فى جامعاتنا العربية لا زالت فى أمس الحاجة إلى وجود العديد من المراجع المكتوبة باللغة العربية فى تخصصات هذه العلوم . والعمل على سد هذا النقص يسهم إلى حد كبير فى إعداد الأجيال التى نريد لها أن تبنى صرح النهضة والحضارة على أسس وطيدة من المعرفة الحقة والتخطيط السليم .

ومن هذا المنطلق ، استهلت دار ماكجروهيل للنشر **McGraw-Hill Book Company** نشاطها بالشروع فى إصدار الطبعة العربية من سلسلة سشوم **Schaum Series** التى لقيت فى طبعتها الأصلية نجاحا لا مثيل له . وهناك فكرة أساسية بسيطة تكمن وراء سلسلة ملخصات سشوم **Schaum Outline Series** مؤداها أن كل عنوان من عناوينها يتناول رقعة خاصة بموضوع معين حدد تحديدا جيدا ، مثل نظرية الاحتمالات ، أو حساب التفاضل والتكامل ، أو الإحصاء ، أو الدوائر الكهربائية ، فيقدم عرضا تمهيديا للنظرية الأساسية لهذه الموضوعات . وكتب سشوم تصلح ككتب مدرسية ، أومذكرات تكميلية معينة ، أو ككتب للمطالعة بقصد التقويم والمراجعة ، أو باعتبارها مراجع يحال إليها .

مقدمة الطبعة الأجنبية

إن حساب المصفوفات أداة رياضية ضرورية لدراسة مواضيع مختلفة مثل الكهرباء ، والكيمياء وعلم الاجتماع وعلم الاحصاء ، وهي أكثر ضرورة لدراسة الرياضيات البحتة . يعتبر هذا الكتاب الذي يعطي المواضيع الأساسية ، متمما للكتب المستعملة ، ومرجعا من أجل أولئك الذين يحتاجون إلى معرفة طرق حساب المصفوفات واستعمالها . ومن جهة ثانية فإن الملخصات النظرية التي يحويها هذا الكتاب كافية لاستعماله كتابا لمقرر .

تقسم أبحاث هذا الكتاب إلى ستة وعشرين فصلا ، الأمر الذي لا يضر بالوضع المنطقي للموضوع ، بل يزيد من فائدة هذا الكتاب . وهذا ما يسمح للفصل بين دراسة المصفوفات الحقيقية – التي تهم الكثيرين – عن المصفوفات ذات العناصر المركبة . يحوي كل فصل تذكرة بالتعاريف والنظريات والمبادىء ، مع أمثلة متعددة ، ويتبع ما تقدم مسائل محلولة وعدد كبير من التمارين الإضافية .

إن الطالب الذي يتعرض لحساب المصفوفات يجد بسرعة أن حل التمارين العددية سهل جداً ، ولكن الصعوبة في أن هذه الدراسة ، تكمن في التعاريف والنظريات وبراهينها . ومن الممكن أن يسبب نقص الخبرة الرياضية بعض المشاكل ، وهذا أمر طبيعي ، لأنه كثيرا ما يكون على الطالب أن يحل تطبيقات عددية لا تذكر مبادئها الأساسية ولا تبرهن نظرياتها إلا بعد حين يؤدي هذا الكتاب على العكس بالقارىء الذي يداوم على قراءة المذكرات والمسائل المتعلقة بكل فصل من فصوله ، إلى جعله مطمئنا لفهم محتواه .

تمتاز المسائل المحلولة عن الأمثلة التي توضح النظريات بتعدد أشكالها ، وهي تحوي معظم البراهين الطويلة للنظريات المهمة ، كما تحوي البراهين القصيرة .

تتطلب المسائل الإضافية من الطالب أن يجد بنفسه البرهان والحل وستكون هذه البراهين ، في بعض الأحيان ، أشكالا أخرى البراهين أعطيت سابقا ، ومع هذا فإن برهان بعض النظريات لا يتطلب أكثر من عدة أسطر – ويمكن خطأ اعتبار بعض المسائل بديهية – بينما يحتاج برهانها إلى كثير من المهارة والدقة .

لا يجوز أن تعالج أي واحدة من هذه المسائل بشيء من الاستخفاف لأن حساب المصفوفات ، بسبب كثرة نظرياته ، يعتبر مقررا أساسيا للذين يرغبون التوصل إلى درجة جيدة من النضج الرياضي .

إن العدد الكبير من المسائل التي يحويها كل فصل من فصول هذا الكتاب ، يجعل حلها كلها ، قبل الانتقال إلى ما بعدها أمرا غير عملي ، ومع ذلك فإنه من الضروري إعطاء اهتمام خاص للمسائل الإضافية التي يحويها الفصلان الأول والثاني من هذا الكتاب ، وبعد أن يتمكن القارىء من هذه المسائل فإنه سوف يشعر باطمئنان قوي عند متابعة دراسة هذا الكتاب .

يشكر المؤلف هيئة مؤسسة شوم للنشر على تعاونهم الكبير .

فرانك ايرز

كارليل

أكتوبر ١٩٦٢

المحتويات

صفحة

الفصل الأول

المصـــفوفات

تسمى مجموعة الأعداد المرتبة على شكل مستطيل و الموضوعة داخل قوسين مثل

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \quad (\text{ا}) \qquad , \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

والتى تخضع لقواعد معينة لعمليات سنبينها فيما بعد **مصفوفة** . المصفوفة . (ا) يمكن اعتبارها **كصفوفة المعاملات** لمجموعة المعادلات المتجانسة : $\begin{cases} 2x+3y+7z = 0 \\ x - y + 5z = 0 \end{cases}$ أو كصفوفة ممددة لمجموعة المعادلات الخطية غير المتجانسة : $\begin{cases} 2x+3y = 7 \\ x - y = 5 \end{cases}$. سنرى فيما بعد كيف يمكن استعمال المصفوفات لحل هذه المجموعات ، ومن الممكن إعطاء تفسير مشابه للمصفوفة (ب) بأن نعتبر صفوفها ممثلة لاحداثيات النقاط (1,3,1) ، (2,1,4) ، و (4,7,6) فى الفراغ العادى . سنستعمل أيضا فيما بعد المصفوفات ، لكى نبرهن على أن ثلاث نقاط واقعة أو غير واقعة فى مستوى واحد مع نقطة الأصل أو على أنها واقعة أو غير واقعة على استقامة واحدة مع نقطة الأصل .

تسمى الأعداد أو الدوال a_{ij} الواردة فى المصفوفة :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (1 . 1)$$

عناصر المصفوفة ، حيث يعنى الدليل الأول فى العنصر a_{ij} رقم الصف ويعنى الدليل الثانى رقم العمود الذى يقع فيهما العنصر ، وبذا سيحمل كل عنصر من الصف الثانى العدد 2 كدليل أول كما يحمل كل عنصر من العمود الخامس الرقم 5 كدليل ثان . توصف كل مصفوفة ذات m صفا و n عمودا بأنها من درجة $m \times n$ ويقرأ ذلك : من درجة (m فى n) (نستعمل فى بعض الأحيان للدلالة على مصفوفة القوسين (   ) أو الزوجين من القطع المستقيمة ‖   ‖ ولكننا سنستعمل القوسين فى كل مكان من هذا الكتاب) .

نذكر فى بعض الأحيان المصفوفة (1 . 1) بقولنا المصفوفة $[a_{ij}]$ ذات الدرجة $m \times n$ أو المصفوفة $A = [a_{ij}]$ ذات الدرجة $m \times n$ ، وعندما تكون الدرجة مقررة ومعروفة سنكتب بشكل مختصر « المصفوفة A » .

المصفوفات المربعة : إذا كانت $m=n$ فإن (1.1) يكون مربعاً ويمكن عندئذ تسميته **مصفوفة** مربعة من درجة n أو مصفوفة مربعة n .

فى مصفوفة مربعة نسمى العناصر $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ **عناصر قطرية** ، ونسمى حاصل جمع العناصر القطرية لمصفوفة مربعة A ، **أثر** المصفوفة .

المصفوفات المتساوية : نقول إن المصفوفتين $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ متساويتان فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط)

هاتان المصفوفتان من درجة واحدة وكان كل عنصر من إحداهما مساويا للعنصر المقابل له من الثانية أي إذا كان وإذا كان فقط .

$$a_{ij} = b_{ij} , \qquad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$$

أي : تكون مصفوفتين متساويتين فيما إذا كانت وإذا كانت فقط إحداهما نسخة من الثانية .

المصفوفات الصفرية : تسمى المصفوفة ، التي كل عنصر فيها صفر ، **المصفوفة الصفرية** وعندما تكون المصفوفة صفرا ولا يكون هناك التباس في درجتها ، فإننا نكتب $A = O$ ، بدلا من أن نكتب الجدول $m \times n$ حيث كل عنصر فيه صفر .

مجموع مصفوفتين : إذا كانت $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ مصفوفتين من الدرجة $m \times n$ فإن مجموعهما (حاصل طرحهما) $A \pm B$ يعرف بالمصفوفة $C = [c_{ij}]$ ذات الدرجة $m \times n$ حيث كل عنصر من C هو مجموع (حاصل طرح) العنصرين المقابلين من المصفوفتين A و B و بذا يكون : $A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]$.

مثال ١ : إذا كان $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ فإنه يكون

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+3 & 3+0 \\ 0+(-1) & 1+2 & 4+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

و

$$A - B = \begin{bmatrix} 1-2 & 2-3 & 3-0 \\ 0-(-1) & 1-2 & 4-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

إذا كانت مصفوفتين من درجة واحدة فإننا نقول عنهما **متوافقتين** للجمع والطرح . لا يمكن جمع أو طرح مصفوفتين من درجتين مختلفتين . مثال ذلك : المصفوفتان (ا) و (ب) غير متوافقتين للجمع والطرح .

إن جمع k مصفوفة مثل المصفوفة A هي مصفوفة من الدرجة نفسها ، وكل عنصر فيها ينتج عن تكرار العنصر المقابل من A; k مـــرة .

نعرف : إذا كان k مقدارا عدديا (يسمى k مقدارا عدديا لتمييزه عن الشكل $[k]$ الذي هو مصفوفة من الدرجة 1×1) فإن $k\,A = A\,k$ تعني المصفوفة التي تنتج عن A بضرب كل عنصر من عناصرها في k .

مثال ٢ : إذا كان $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ فإن :

$$A + A + A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} = 3A = A \cdot 3$$

و

$$-5A = \begin{bmatrix} -5(1) & -5(-2) \\ -5(2) & -5(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 10 \\ -10 & -15 \end{bmatrix}$$

و

ونسمي ، بصورة خاصة ، المصفوفة $-A$ سالب A . ونحصل على هذه المصفوفة بضرب كل عنصر من A في $1-$ أو ، بشكل أبسط ، بتغيير إشارة كل عنصر من عناصرها . لكل مصفوفة A نجد $A+(-A) = O$ حيث O يعني المصفوفة الصفرية ذات الدرجة المساوية لدرجة A .

إذا كانت المصفوفات A,B,C متوافقة بالنسبة للجمع فإنه يكون :

(ا) $A + B = B + A$ (قانون التبديل) .

(ب) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (قانون جمع الحدود الجبرية) .

(جـ) $k\,(A+B) = kA + kB = (A+B)\,k$ حيث k مقدار عددى .

(د) توجد مصفوفة D بحيث يكون $A+D = B$.

هذه القوانين تنتج من قوانين الجبر الابتدائى التى تحكم جمع الأعداد وجمع كثيرات الحدود . كما وأن هـذه القوانين تبين .

I - أن خواص جمع المصفوفات المتوافقة متفقة مع خواص جمع عناصر هذه المصفوفات .

الضرب : بحاصل الضرب AB بهذا الترتيب للمصفوفة $A = [\,a_{11}a_{12}a_{13}...a_{1m}\,]$ التى درجتها $1 \times m$

والمصفوفة $B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{m1} \end{bmatrix}$ التى درجتها $m \times 1$ فإنه يقصد المصفوفة $C = [a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1m}b_{m1}]$.

التى درجتها 1×1

أى

$$[a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ a_{1m}] \cdot \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{m1} \end{bmatrix} = [a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1m}b_{m1}] = \left[\sum_{k=1}^{m} a_{1k}b_{k1}\right].$$

يجب ملاحظة أن هذه العملية هى **صف فى عمود** : يضرب كل عنصر من الصف بالعنصر المقابل له من العمود وتجمع حواصل الضرب .

مثال ٣ : (١) $[2\ \ 3\ \ 4]\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = [2(1)+3(-1)+4(2)] = [7]$

(ب) $[3\ \ -1\ \ 4]\begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = [-6-6+12] = 0$

بحاصل الضرب AB بهذا الترتيب للمصفوفة $A = [a_{ij}]$ التى درجتها $m \times p$ والمصفوفة $B = [\,b_{ij}\,]$ والتى درجتها $p \times n$ يقصد المصفوفة $C = [c_{ij}]$ والتى درجتها $m \times n$ حيث

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$$

حيث A مكونة من m صفا و B مكونة من n عمودا . لتكوين $C = AB$ فإن كل صف من A يضرب مرة ومرة واحدة فقط فى كل عمود من أعمدة B . إن العنصر c_{ij} من C هو حاصل ضرب الصف ذى الرقم i من A بالعمود ذى الرقم j من B .

مثال ٤ :

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{bmatrix}$$

نقول إن حاصل الضرب AB معرف أو إن A موافقة لـ B بالنسبة للضرب إذا كان (وإذا كان فقط) عدد أعمدة A مساويا عدد صفوف B وإذا كان A موافقا لـ B بالنسبة للضرب (AB معرف) فإنه ليس من الضرورى أن يكون B موافقا A بالنسبة للضرب ، (إن BA يمكن أن يكون أو لا يكون معرفا) .

أنظر المسألتين ٣ و ٤

إذا فرضنا أن A,B,C متوافقة بالنسبة للجمع والضرب كما هى واردة أدناه ، فإنه يكون :

(هـ) $A(B+C) = AB + AC$ قانون التوزيع الأول .

(و) $(A+B)C = AC + BC$ قانون التوزيع الثانى .

(ز) $A(BC) = (AB)C$ قانون التنسيق (قانون ترتيب الحدود) .

وهكذا نجـد أنه :

(ح) $AB \neq BA$ بصورة عامة .

(ط) $AB = O$ لا يستلزم بالضرورة أن يكون $A = O$ أو $B = O$.

(ى) $AB = AC$ لا يستلزم بالضرورة أن يكون $B = C$.

أنظر المسائل ٣ — ٨

الضرب بالتجزئة : لتكن $A = [a_{ij}]$ مصفوفة من الدرجة $m \times p$ و $B = [b_{ij}]$ مصفوفة من الدرجة $p \times n$. عند تكوين حاصل الضرب AB ، تقسم المصفوفة A فى الواقع إلى m مصفوفة من الدرجة $1 \times p$ ، أما المصفوفة B فإنها تقسم إلى n مصفوفة من الدرجة $p \times 1$. إن هناك تقسيمات أخرى يمكن استعمالها ، فلنجزئ مثلا كلا من A و B إلى مصفوفات أخرى ذات درجات محددة على الجدول ، وذلك برسم مستقيمات من الشكل :

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c} (m_1 \times p_1) & (m_1 \times p_2) & (m_1 \times p_3) \\ \hline (m_2 \times p_1) & (m_2 \times p_2) & (m_2 \times p_3) \end{array}\right], \qquad B = \left[\begin{array}{c|c} (p_1 \times n_1) & (p_1 \times n_2) \\ \hline (p_2 \times n_1) & (p_2 \times n_2) \\ \hline (p_3 \times n_1) & (p_3 \times n_2) \end{array}\right]$$

أو

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \hline A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{array}\right], \qquad B = \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \\ \hline B_{31} & B_{32} \end{array}\right]$$

فى كل تجزئة يجب أن تجزأ أعمدة A وصفوف B بشكل واحد ، ومن جهة أخرى يمكن أن تكون الأعـداد m_1, m_2, n_1, n_2 أى أعداد صحيحة غير سالبة (محتوية الصفر) ويكون $m_1 + m_2 = m$ و $n_1 + n_2 = n$ ويكون عندئذ :

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + A_{13}B_{31} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} + A_{13}B_{32} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} + A_{23}B_{31} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} + A_{23}B_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = C$$

مثال ٥ : احسب AB إذا علمت أن $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

لنجـــر التجزئة التالية :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right],$$

فنجـــد

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 7 & 5 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 7 & 5 & 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 0 \\ 7 & 5 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

انظر أيضا المسألة ٩ .

لتكن $A, B, C, \ldots$ مصفوفات مربعة من الدرجة n ولنجزئ A إلى مصفوفات كما هو مبين فيما يلي ومن الدرجات الموضحة أدناه :

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} (p_1 \times p_1) & (p_1 \times p_2) & \ldots & (p_1 \times p_s) \\ \hline (p_2 \times p_1) & (p_2 \times p_2) & \ldots & (p_2 \times p_s) \\ \hline \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \hline (p_s \times p_1) & (p_s \times p_2) & \ldots & (p_s \times p_s) \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{s1} & A_{s2} & \ldots & A_{ss} \end{bmatrix}$$

ولنفرض أن المصفوفات $B, C, \ldots$ قد جزئت بالطريقة السابقة نفسها . يمكن عندها ، لإجراء جمع وطرح وضرب المصفوفات الاستعانة بالمصفوفات $A_{11}, A_{12}, \ldots; B_{11}, B_{12}, \ldots; C_{11}, C_{12}, \ldots$.

مسائل محلولة

١ - ا -
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+(-4) & -1+1 & 0+2 \\ 4+1 & 0+5 & 2+0 & 1+3 \\ 2+2 & -5+(-2) & 1+3 & 2+(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 2 & 4 \\ 4 & -7 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

ب -
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-3 & 2+4 & -1-1 & 0-2 \\ 4-1 & 0-5 & 2-0 & 1-3 \\ 2-2 & -5+2 & 1-3 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -2 & -2 \\ 3 & -5 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

جـ -
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 & 0 \\ 12 & 0 & 6 & 3 \\ 6 & -15 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

د -
$$-\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

٢ – إذا كان $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ أوجـد $D = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{bmatrix}$ بحيث يكون $A + B - D = 0.$

$$A + B - D = \begin{bmatrix} 1-3-p & 2-2-q \\ 3+1-r & 4-5-s \\ 5+4-t & 6+3-u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2-p & -q \\ 4-r & -1-s \\ 9-t & 9-u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

إذا كان $-2-p = 0$,

و $p = -2, \; 4-r = 0$

و $r = 4, \ldots\ldots$ فـإن $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -1 \\ 9 & 9 \end{bmatrix} = A + B.$

٣ – أ – 3. (a) $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(2) + 5(3) + 6(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \end{bmatrix}$

ب – $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(4) & 2(5) & 2(6) \\ 3(4) & 3(5) & 3(6) \\ -1(4) & -1(5) & -1(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}$

جـ – $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -6 & 9 & 6 \\ 0 & -7 & 10 & 7 \\ 5 & 8 & -11 & -8 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1(4) + 2(0) + 3(5) & 1(-6) + 2(-7) + 3(8) & 1(9) + 2(10) + 3(-11) & 1(6) + 2(7) + 3(-8) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 19 & 4 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

د – $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1) + 3(2) + 4(3) \\ 1(1) + 5(2) + 6(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 29 \end{bmatrix}$

هـ – $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(3) + 2(1) + 1(-2) & 1(-4) + 2(5) + 1(2) \\ 4(3) + 0(1) + 2(-2) & 4(-4) + 0(5) + 2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 8 & -12 \end{bmatrix}$

٤ – إذا كان $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$ فإن

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

و

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -8 & 0 \\ 8 & -1 & 8 \\ 8 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

يمكن القارئ أن يبرهن على أن $A^3 = A \cdot A^2$ و $A^2 \cdot A^3 = A^3 \cdot A^2.$

٥ – برهن أن

أ – $\sum_{k=1}^{2} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^{2} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^{2} a_{ik} c_{kj},$

ب – $\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} a_{ij} = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{2} a_{ij},$

جـ – (c) $\sum_{k=1}^{2} a_{ik} \left(\sum_{h=1}^{3} b_{kh} c_{hj} \right) = \sum_{h=1}^{3} \left(\sum_{k=1}^{2} a_{ik} b_{kh} \right) c_{hj}.$

أ –

$$\sum_{k=1}^{2} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) = a_{i1}(b_{1j} + c_{1j}) + a_{i2}(b_{2j} + c_{2j}) = (a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j}) + (a_{i1} c_{1j} + a_{i2} c_{2j})$$
$$= \sum_{k=1}^{2} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^{2} a_{ik} c_{kj}.$$

ب –

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} a_{ij} = \sum_{i=1}^{2}(a_{i1}+a_{i2}+a_{i3}) = (a_{11}+a_{12}+a_{13}) + (a_{21}+a_{22}+a_{23})$$
$$= (a_{11}+a_{21}) + (a_{12}+a_{22}) + (a_{13}+a_{23})$$
$$= \sum_{i=1}^{2} a_{i1} + \sum_{i=1}^{2} a_{i2} + \sum_{i=1}^{2} a_{i3} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{2} a_{ij}.$$

إن هذا يبين ببساطة ، أنه لإيجاد مجموع كل عناصر مصفوفة يمكن للمرء أن يجمع أولا عناصر كل صف أو عناصر كل عمـود .

جـ –

$$\sum_{k=1}^{2} a_{ik}\left(\sum_{h=1}^{3} b_{kh}c_{hj}\right) = \sum_{k=1}^{2} a_{ik}(b_{k1}c_{1j} + b_{k2}c_{2j} + b_{k3}c_{3j})$$
$$= a_{i1}(b_{11}c_{1j} + b_{12}c_{2j} + b_{13}c_{3j}) + a_{i2}(b_{21}c_{1j} + b_{22}c_{2j} + b_{23}c_{3j})$$
$$= (a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21})c_{1j} + (a_{i1}b_{12} + a_{i2}b_{22})c_{2j} + (a_{i1}b_{13} + a_{i2}b_{23})c_{3j}$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{2} a_{ik}b_{k1}\right)c_{1j} + \left(\sum_{k=1}^{2} a_{ik}b_{k2}\right)c_{2j} + \left(\sum_{k=1}^{2} a_{ik}b_{k3}\right)c_{3j}$$
$$= \sum_{h=1}^{3}\left(\sum_{k=1}^{2} a_{ik}b_{kh}\right)c_{hj}.$$

٦ – برهن أنه إذا كان $A = [a_{ij}]$ من الدرجة $m \times n$ وكان كل من $B = [b_{ij}]$ و $C = [c_{ij}]$ من الدرجة $n \times p$ فإن $A(B+C) = AB + AC$

إن عناصر الصف ذى الرقم i من A هى $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ وعناصر العمود ذى الرقم j من $(B+C)$ هى $b_{1j}+c_{1j},\ b_{2j}+c_{2j},\ \ldots,\ b_{nj}+c_{nj}$. ينتج عن هذا أن العنصر الذى يقع فى الصف ذى الرقم i والعمود ذى الرقم j من $A\,(B+C)$ هو

$$a_{i1}(b_{1j}+c_{1j}) + a_{i2}(b_{2j}+c_{2j}) + \ldots + a_{in}(b_{nj}+c_{nj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj}+c_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj},$$

وهو مجموع الحدين الواقعين فى الصف ذى الرقم i والعمود ذى الرقم j فى AB و AC

٧ – برهن أنه إذا كان $A = [a_{ij}]$ من الدرجة $m \times n$ و $B=[b_{ij}]$ من الدرجة $n \times p$ و $C=[c_{ij}]$ من الدرجة $p \times q$ فإن $A\,(BC) = (\,AB)\,C$

إن عناصر الصف ذى الرقم i من A هى $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ وعناصر العمود ذى الرقم j من $B\ C$ هى : $\sum_{h=1}^{p} b_{1h}c_{hj},\ \sum_{h=1}^{p} b_{2h}c_{hj},\ \ldots,\ \sum_{h=1}^{p} b_{nh}c_{hj}$; ينتج عن ذلك أن العنصر الواقع فى الصف ذى الرقم i والعمود ذى الرقم j من $A\,(BC)$ هو : .

$$a_{i1}\sum_{h=1}^{p} b_{1h}c_{hj} + a_{i2}\sum_{h=1}^{p} b_{2h}c_{hj} + \ldots + a_{in}\sum_{h=1}^{p} b_{nh}c_{hj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(\sum_{h=1}^{p} b_{kh}c_{hj}\right)$$
$$= \sum_{h=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kh}\right)c_{hj} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{k1}\right)c_{1j} + \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{k2}\right)c_{2j} + \ldots + \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kp}\right)c_{pj}$$

وهذا هو العنصر الواقع فى الصف ذى الرقم i والعمود ذى الرقم j من $(AB)\ C$; أى $A\ (BC) = (AB)\ C$

٨ – نفرض أن A, B, C, D مصفوفات متوافقة فيما بينها بالنسبة للجمع والضرب ، برهن بطريقتين مختلفتين أن :

$$(A+B)\,(C+D) = AC + AD + BC + BD$$

بالاستفادة من العلاقة (هـ) ثم من العلاقة (و) نجـد :

$$(A+B)(C+D) = (A+B)C + (A+B)D = AC + BC + AD + BD.$$

أما إذا استعنا بالعلاقة (و) وثم بـ (هـ) فإننا نجـــد :

$$(A+B)(C+D) = A(C+D)+B(C+D) = AC+AD+BC+BD$$
$$= AC+BC+AD+BD.$$

٩ - أ -

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\\hline 3&1&2\end{array}\right] = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}[3\ 1\ 2] = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&1&2\\6&2&4\\9&3&6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4&1&2\\6&3&4\\9&3&7\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc}1&0&0&0&0&0\\0&2&0&0&0&0\\\hline 0&0&3&0&0&0\\0&0&0&4&0&0\\\hline 0&0&0&0&5&0\\0&0&0&0&0&6\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|cc|cc}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\\hline 0&0&1&0&0&0\\0&0&0&3&0&0\\\hline 0&0&0&0&2&0\\0&0&0&0&0&3\end{array}\right] = \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}&[0]&[0]\\ [0]&\begin{bmatrix}3&0\\0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix}&[0]\\ [0]&[0]&\begin{bmatrix}5&0\\0&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&2&0&0&0&0\\0&0&3&0&0&0\\0&0&0&12&0&0\\0&0&0&0&10&0\\0&0&0&0&0&18\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|ccc|c}1&1&0&0&0&0\\2&1&0&0&0&0\\\hline 0&0&3&1&2&0\\0&0&1&2&1&0\\0&0&0&1&1&0\\\hline 0&0&0&0&0&1\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|ccc|c}1&2&3&4&5&6\\2&3&4&5&6&7\\\hline 3&4&5&6&7&8\\4&5&6&7&8&9\\9&8&7&6&5&4\\\hline 8&7&6&5&4&1\end{array}\right] = \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&4&5\\4&5&6\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}6\\7\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}3&1&2\\1&2&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&4\\4&5\\9&8\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}3&1&2\\1&2&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&6&7\\6&7&8\\7&6&5\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}3&1&2\\1&2&1\\0&1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}8\\9\\4\end{bmatrix}\\ [1]\cdot[8\ 7]&[1]\cdot[6\ 5\ 4]&[1]\cdot[1]\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}3&5\\4&7\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}7&9&11\\10&13&16\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}13\\19\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}31&33\\20&22\\13&13\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}35&37&39\\24&26&28\\13&13&13\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}41\\30\\13\end{bmatrix}\\ [8\ \ 7]&[6\ \ 5\ \ 4]&[1]\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3&5&7&9&11&13\\4&7&10&13&16&19\\31&33&35&37&39&41\\20&22&24&26&28&30\\13&13&13&13&13&13\\8&7&6&5&4&1\end{bmatrix}$$

١٠ - لنفرض أن
$$\begin{cases}x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2\\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2\\ x_3 = a_{31}y_1 + a_{32}y_2\end{cases}$$
ثلاث صيغ خطية في y_1 و y_2 ، ولنفرض أن
$$\begin{cases}y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2\\ y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2\end{cases}$$
هو تحويل خطي من الأحداثيين (y_1 و y_2) إلى الاحداثيين (z_1 z_2) . إذا طبقنا هذا التحويل على الصيغ الخطية المعطاة فإننا نحصل على مجموعة الصيغ .

$$\begin{cases}x_1 = (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})z_1 + (a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})z_2\\ x_2 = (a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})z_1 + (a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})z_2\\ x_3 = (a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21})z_1 + (a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22})z_2\end{cases}$$

وإذا استعملنا رموز المصفوفات فإن الصيغ الثلاث تصبح $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$ وكذلك فإن التحويل يكون $\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}$ ، أما ناتج تطبيق هذا التحويل فيعطي الصيغ الثلاث .

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

وهكذا إذا خضعت مجموعة من m من الصور الخطية فى n متغير مصفوفتها A لتحويل خطى للمتغيرات مصفوفته B فإنه ينتج مجموعة من m من الصور الخطية مصفوفتها $C = AB$

مسائل اضافية

١١ – إذا أعطيت، $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$،

ا – فاحسب

$$A+B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 9 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad A-C = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -5 \\ 5 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

ب – واحسب

$$-2A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 6 \\ -10 & 0 & -4 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad 0 \cdot B = 0$$

جـ – وحقق $A + (B - C) = (A+B) - C.$

د – أوجد المصفوفة D بحيث يكون $A+D=B$ وتحقق من أن $D = B-A = -(A-B)$

١٢ – إذا أعطيت $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$، تحقق من أن $AB = 0$ و $BA = \begin{bmatrix} -11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{bmatrix}$.

تحقق بعد ذلك من أن $BA \neq AB$ بصورة عامة .

١٣ – وإذا كان $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}$، و $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$، و $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

برهن أن $AB = AC$ وأن كون $AB = AC$ لا يستلزم بالضرورة أن يكون $B = C$

١٤ – إذا كان $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$، برهن أن $(AB)C = A(BC)$

١٥ – استعمل مصفوفات المسألة ١١ وتحقق من أن $A(B+C) = AB + AC$ وأن $(A+B)C = AC + BC$

١٦ – فسر بصورة عامة لماذا $(A \pm B)^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$ و $A^2 - B^2 \neq (A-B)(A+B)$

١٧ – إذا أعطيت، $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

ا – برهن أن $AB = BA = 0, \ AC = A, \ CA = C.$

ب – استفد من نتائج (ا) وبرهن أن $ACB = CBA, \ A^2 - B^2 = (A-B)(A+B), \ (A \pm B)^2 = A^2 + B^2.$

١٨ – إذا فرض $A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$، حيث $i^2 = -1$ ، فاستنتج صيغة تعطى القوى الصحيحة الموجبة لـ A .

الجواب : $A^n = I, A, -I, -A$ بحسب ما يكون $n = 4p, 4p+1, 4p+2, 4p+3$ حيث $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

١٩ – برهن أن حاصل ضرب اثنين أو أكثر من مجموعة المصفوفات

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

هو مصفوفة من هذه المجموعة .

٢٠ – إذا أعطيت المصفوفة A من الدرجة $m \times n$ والمصفوفة B من الدرجة $n \times p$ والمصفوفة C من الدرجة $r \times q$ فما هى الشروط التى يجب أن تحققها الأعداد p و q و r لكى تكون حواصل الضرب موجودة . ما هى درجة كل من مصفوفات حواصل الضرب .

ا – ABC، ب – ACB، جـ – $A(B+C)$؟

الجواب ا – $p = r;\ m \times q$ ب – $r = n = q;\ m \times p$ جـ – $r = n,\ p = q;\ m \times q$

٢١ – احسب AB إذا علمت :

(ا) : $A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ و $B = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$ ج : $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(ب) : $A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$ و $B = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline -1 & 2 \end{array}\right]$ ج : $\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

(جـ) : $A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$ و $B = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$. ج : $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

٢٢ – برهن أن (ا) أثر $(A+B)$ = أثر A + أثر B (ب) أثر (kA) = k أثر A .

٢٣ – إذا كان $\begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 + y_3 \\ x_2 = 2y_1 + y_2 - 3y_3 \end{cases}$ ، $\begin{cases} y_1 = z_1 + 2z_2 \\ y_2 = 2z_1 - z_2 \\ y_3 = 2z_1 + 3z_2 \end{cases}$ فحقق أن $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z_1 + 7z_2 \\ -2z_1 - 6z_2 \end{bmatrix}.$$

٢٤ – ليكن $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ من الدرجة $m \times n$ وإذا كان $C = [c_{ij}]$ من الدرجة $n \times p$ برهن أن $(A+B)\,C = AC + BC$.

٢٥ – إذا كان $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ حيث $(i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, p;\ k = 1, 2, \dots, n)$;

وإذا رمزنا بالرمز β_j لمجموع عناصر الصف ذى الرقم j من B أى $\beta_j = \sum_{k=1}^{n} b_{jk}$. فبرهن أن العنصر الواقع

فى الصف ذى الرقم i من حاصل الضرب $A\cdot\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \beta_p\end{bmatrix}$ هو مجموع عناصر الصف ذى الرقم i من حاصل الضرب AB.

استخدم هذه الطريقة لحساب حواصل الضرب الوارد فى المسألتين ١٢ ، ١٣ .

٢٦ – تسمى العلاقة (مثل التوازى التطابق) بين عناصر رياضية علاقة تكافؤ فيما إذا حققت الخواص التالية :

(ا) التحديد : إما أن يكون a محققا العلاقة مع b وإما أن يكون a غير محقق لهذه العلاقة مع b .

(ب) الانعكاس : a يحقق العلاقة مع a لكل a .

(جـ) التماثل : إذا كان a يحقق العلاقة مع b فإن b يحقق هذه العلاقة مع a .

(د) التعدى : إذا كان a يحقق العلاقة مع b وكان b يحقق هذه العلاقة مع c فإن a يحقق هذه العلاقة نفسها مع c .

برهن أن توازى المستقيمات وتشابه المثلثات وتساوى المصفوفات هى علاقات تكافؤ .

برهن أن تعامد المستقيمات ليس علاقة تكافؤ .

٢٧ – برهن أن علاقة التوافق بالنسبة لجمع المصفوفات هى علاقة تكافؤ ، بينما علاقة التوافق بالنسبة لضرب المصفوفات ليست علاقة تكافؤ .

٢٨ – برهن أنه إذا كانت A, B, C ثلاث مصفوفات تحقق العلاقتين $AC = CA$ و $BC = CB$.

فإن : $(AB \pm BA)\, C = C\,(AB \pm BA)$

الفصل الثانى

بعض انماط من المصــفوفات

مصفوفة الوحدة (المحايدة) :

إذا كانت A مصفوفة مربعة وكان $a_{ij} = 0$ لقيم $i>j$ فإنها تسمى **مصفوفة مثلثية عليا** وإذا كانت $a_{ij} = 0$ لقيم $i<j$ فإنها تدعى **مصفوفة مثلثية دنيا** . وعلى ذلك :

مصفوفة مثلثية عليا

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

مصفوفة مثلثية دنيا

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

المصفوفة ,
$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$
والتى هى مثلثية عليا ومثلثية دنيا تسمى **مصفوفة قطرية** .

كثيرا ما تكتب هذه المصفوفة بالشكل :

$$D = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn})$$

أنظر المسألة ١

إذا كان فى المصفوفة القطرية D , $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn} = k$, فإنها تدعى **مصفوفة عددية** وبالإضافة إلى ذلك إذا كان $k = 1$ فإن هذه المصفوفة تدعى مصفوفة الوحدة (المحايدة) . ويرمز لها بالرمز I_n مثال ذلك

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وإذا كانت درجة المصفوفة واضحة أو غير هامة فإننا نرمز لمصفوفة الوحدة بالرمز I . من الواضح أن مجموع p من المصفوفات I_n يحقق

وأن $I^p = I.I \ldots = I$.

إن لمصفوفة الوحدةخواص مطابقة لبعض خواص الواحد كعدد صحيح . مثال ذلك أذا كان
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

فإن $I_2 . A = A . I_3 = I_2 A I_3 = A$. ، ويمكن للقارئ أن يحقق ذلك بسهولة .

مصفوفات مربعة خاصة :

إذا كانت A و B مصفوفتين مربعتين وحققتا العلاقة $AB = BA$ فإننا نسمى هاتين المصفوفتين **تبديليتين** أو **قابلتين للتبديل** . ومن السهل أن نبرهن على أنه إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n فإنها تبديلية مع نفسها ومع المصفوفة I_n .

أنظر المسألة ٢

إذا حققت المصفوفات A و B العلاقة $AB = -BA$ قلنا إنهما **تبديليتان عكسيا** .

إذا حققت المصفوفة A العلاقة $A^{k+1} = A$ حيث k عدد صحيح موجب ، قلنا إن هذه المصفوفة **دورية** .

وإذا كان k أصغر عدد صحيح موجب يحقق العلاقة $A^{k+1} = A$ قلنا إن دورة A هى k .

إذا كان $k = 1$ أى إذا كان $A^2 = A$ فإننا نقول عن A إنها **متساوية القوى** .

أنظر المسألتين ٣-٤

تسمى المصفوفة A التى تحقق العلاقة $A^p = 0$ حيث p عدد صحيح موجب بالمصفوفة **معدومة القوى** . وإذا كان p أصغر عدد صحيح موجب يحقق العلاقة $A^p = 0$ قلنا إن A مصفوفة معدومة القوى من الدليل p .

أنظر المسألتين ٥ و٦

معكوس مصفوفة :

إذا كانت A و B مصفوفتين مربعتين بحيث يكون $AB = BA = I$ فإن B تدعى معكوس A ونكتب $B = A^{-1}$ (B تساوى معكوس A) . إن المصفوفة B يكون لها ، أيضا ، معكوس هو المصفوفة A ويمكننا أن نكتب $A = B^{-1}$.

مثال ١ : بما أن $\begin{bmatrix}1&2&3\\1&3&3\\1&2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6&-2&-3\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = I$ فإن كل مصفوفة فى حاصل الضرب هى معكوس الأخرى .

سنرى فيما بعد (الفصل السابع) أنه ليس لكل مصفوفة مربعة معكوس وسنبرهن عندها أنه إذا كان للمصفوفة A معكوس فإنه يكون معكوس وحيـد

أنظر المسألة ٧

إذا كانت A و B مصفوفتين مربعتين من درجة واحدة وكان لهما المعكوسان A^{-1} و B^{-1} على الترتيب فإن $(AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$ أى :

I – إن معكوس حاصل ضرب مصفوفتين ، يوجد لهما معكوسان ، هو حاصل الضرب **بترتيب معاكس لمكوسيهما** .

أنظر المسألة ٨

تدعى المصفوفة A التى تحقق العلاقة $A^2 = I$ مصفوفة **ملتفة** . إن مصفوفة الوحدة مصفوفة من هذا النوع وإن المصفوفة الملتفة هى معكوس نفسها .

أنظر المسألة ٩

منقول المصفوفة :

تسمى المصفوفة ذات الدرجة $n \times m$ الناتجة عن المبادلة بين الصفوف والأعمدة للمصفوفة A ذات الدرجة $m \times n$ منقول المصفوفة A ويرمز لها بالرمز A' (منقول A) . مثال ذلك إن منقول المصفوفة $A = \begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}$

هو المصفوفة $A' = \begin{bmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{bmatrix}$.

يلاحظ أن العنصر a_{ij} الذى يقع فى الصف ذى الرقم i والعمود ذى الرقم j فى المصفوفة A يقع فى تقاطع الصف ذى الرقم j والعمود ذى الرقم i للمصفوفة A' .

إذا كان A' و B' هما منقولى A و B على الترتيب وإذا كان k مقدارا عدديا فإننا نجد بسهولة :

(أ) $(A')' = A$ و (ب) $(kA)' = k\,A'$

يبرهن فى المسألتين ١٠ و ١١ ما يلى :

II — إن منقول مجموع مصفوفتين هو مجموع منقولى هاتين المصفوفتين أى :

$$(A + B)' = A' + B'$$

III — إن منقول حاصل ضرب مصفوفتين هو حاصل الضرب بترتيب معاكس لمنقولهما أى أن

$$(AB)' = B'.A'$$

أنظر المسائل ١٠–١٢

المصفوفات المتماثلة :

إذا حققت المصفوفة المربعة A العلاقة $A = A'$ قلنا إنها مصفوفة متماثلة . وعلى ذلك فالمصفوفة المربعة $A = [a_{ij}]$ تكون مصفوفة متماثلة إذا تحققت العلاقة $a_{ij} = a_{ji}$ لكل قيم i و j

مثال ذلك : المصفوفة 3 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ هى مصفوفة متماثلة وكذلك المصفوفة kA لأى عدد k .

فى المسألة ١٣ سنبرهن

IV — إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n فإن المصفوفة $A + A'$ متماثلة .

إذا حققت المصفوفة المربعة A العلاقة $A' = -A$ سميت مصفوفة متماثلة تخالفية أى تكون المصفوفة المربعة متماثلة تخالفية إذا كان $a_{ij} = -a_{ji}$ لكل قيم i و j ومن الواضح أنه يجب أن تكون عناصر قطر هذه المصفوفة أصفارا .مثال ذلك $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ هى مصفوفة متماثلة تخالفية وكذلك المصفوفة kA مهما كان العدد k . بتغيير طفيف فى برهان المسألة ١٣ يمكننا أن نبرهن ما يلى :

V — إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n فإن $A - A'$ تكون مصفوفة متماثلة تخالفية .

نستنتج من النظريتين IV و V ما يلى :

VI — يمكن كتابة كل مصفوفة مربعة A كمجموع المصفوفة المتماثلة $B = \frac{1}{2}(A+A')$ والمصفوفة المتماثلة التخالفية $C = \frac{1}{2}(A-A')$.

أنظر المسألتين ١٤–١٥

المصفوفة المترافقة :

إذا كان a و b عددين حقيقين وكان $i = \sqrt{-1}$ فإن $z = a + bi$ يسمى عدداً مركبا . ويسمى العددان المركبان $a + bi$ و $a - bi$ عددين مترافقين ، كل منهما مرافق للآخر . إذا كان $z = a + bi$ فإنه يرمز لمرافقه بالرمز $\bar{z} = \overline{a+bi}$

إذا كان $z_1 = a + bi$ و $z_2 = \bar{z}_1 = a - bi$ فإنه يكون $\bar{z}_2 = \bar{\bar{z}}_1 = \overline{a - bi} = a + bi$, أى أن المرافق للمرافق لعدد مركب z هو هذا العدد z نفسه .

إذا كان $z_1 = a + bi$ و $z_2 = c + di$ فإنه يكون :

(i) $z_1 + z_2 = (a+c) + (b+d)i$ و $\overline{z_1 + z_2} = (a+c) - (b+d)i = (a-bi) + (c-di) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$,

أى أن المرافق لمجموع عددين مركبين هو مجموع مرافقى هذين العددين :

(ii) $z_1 \cdot z_2 = (ac-bd) + (ad+bc)i$ و $\overline{z_1 \cdot z_2} = (ac-bd) - (ad+bc)i = (a-bi)(c-di) = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$,

أى أن المرافق لحاصل ضرب عددين مركبين هو حاصل ضرب مرافقيهما .

إذا كانت A مصفوفة ، لها عناصر أعداد مركبة ، فإن المصفوفة التى تنتج عن A بتعويض كل عنصر فيها بمرافقه تدعى **المصفوفة المرافقة للمصفوفة** A ونرمز لها بالرمز $\bar{A}$ (المرافقة للمصفوفة A) .

مثال ٢ : إذا كان $A = \begin{bmatrix} 1+2i & i \\ 3 & 2-3i \end{bmatrix}$ فان يكون $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1-2i & -i \\ 3 & 2+3i \end{bmatrix}$

إذا كان $\bar{A}$ و $\bar{B}$ المرافقين للمصفوفتين A و B وإذا كان k عددا ما فإنه يكون :

(جـ) $\bar{\bar{A}} = A$ و (د) $\overline{(kA)} = \bar{k}.\bar{A}$

من (i) و (ii) الواردة أعلاه يمكن إثبات ما يلى :

VII – المصفوفة المرافقة لمجموع مصفوفتين هى مجموع مرافقيهما أى : $\overline{(A+B)} = \bar{A}+\bar{B}$

VIII – المصفوفة المرافقة لحاصل ضرب مصفوفتين هى حاصل ضرب مرافقيهما بنفس الترتيب أى : $\overline{(AB)} = \bar{A}.\bar{B}$

يرمز لمنقول $\bar{A}$ بالرمز $\bar{A}'$ (منقول المصفوفة المرافقة لـ A) . ونكتب ذلك فى كثير من الأحيان بالشكل A^* كذلك :

IX – إن منقول المصفوفة المرافقة للمصفوفة A يساوى المصفوفة المرافقة لمنقول A أى $(\bar{A})' = \overline{(A')}$

مثال ٣ :

من المثال ٢ ينتج أن :

$$(\bar{A})' = \begin{bmatrix} 1-2i & 3 \\ -i & 2+3i \end{bmatrix} \text{ بينما } A' = \begin{bmatrix} 1+2i & 3 \\ i & 2-3i \end{bmatrix} \text{ و } \overline{(A')} = \begin{bmatrix} 1-2i & 3 \\ -i & 2+3i \end{bmatrix} = (\bar{A})'$$

المصفوفات الهيرميتية :

تسمى المصفوفة المربعة $A = [a_{ij}]$ التى تحقق العلاقة $\bar{A}' = A$ **مصفوفة هيرميتية** . أى أن المصفوفة A تكون هيرميتية إذا كان $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ لكل قيم i و j . ومن الواضح أن عناصر قطر كل مصفوفة هيرميتية أعداد حقيقية

مثال ٤ :

إن المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{bmatrix}$ مصفوفة هيرميتية .

هل المصفوفة kA هيرميتية إذا كان k عددا حقيقيا ما ؟ وإذا كان عددا مركبا ما ؟

المصفوفة المربعة $A = [a_{ij}]$ التى تحقق العلاقة $\bar{A}' = -A$ تسمى **مصفوفة هيرميتية متخالفة** أى تكون المصفوفة هيرميتية متخالفة فيما إذا كان $a_{ij} = -\bar{a}_{ij}$ لكل قيم i و j ومن الواضح أن عناصر قطر مصفوفة هيرميتية متخالفة أما أن تكون أصفارا أو أعدادا تخيلية بحتة .

مثال ٥ :

إن المصفوفة $A = \begin{bmatrix} i & 1-i & 2 \\ -1-i & 3i & i \\ -2 & i & 0 \end{bmatrix}$ هى مصفوفة هيرميتية متخالفة . هل $k\,A$ هيرميتية متخالفة إذا كان k عددا حقيقيا ما ؟ إذا كان عددا مركبا ؟ وإذا كان عددا تخيليا بحتا ؟

بإحداث تغيرات طفيفة فى المسألة ١٣ يمكننا أن تبرهن :

X – إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n فإن $A + A'$ تكون مصفوفة هيرميتية و $A - A'$ مصفوفة هيرميتية متخالفة .

ينتج عن النظرية X ما يلى :

XI – يمكن كتابة كل مصفوفة مربعة A لها عناصر أعداد مركبة ، كمجموع المصفوفة الهيرميتية $B = \frac{1}{2}(A + A')$ والمصفوفة الهيرميتية المتخالفة $C = \frac{1}{2}(A - A')$

المجموع المباشر :

إذا كانت $A_1, A_2, \ldots, A_s$ مصفوفات مربعة درجاتها على الترتيب $m_1, m_2, \ldots, m_s$ فإن المصفوفة القطرية :

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & A_s \end{bmatrix} = \text{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_s)$$

تسمى المجموع المباشر للمصفوفة A_i

مثال ٦ : إذا كان $A_1 = [2]$ و $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ و $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

فإن المجموع المباشر للمصفوفات A_1 و A_2 و A_3 هو

$$\text{diag}(A_1, A_2, A_3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

إن المسألة ٩ (ب) من الفصل ١ توضح النظرية التالية :

XII – إذا كان $A = \text{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_s)$ ، $B = \text{diag}(B_1, B_2, \ldots, B_s)$ حيث A_i و B_i مصفوفتان من درجة واحدة لقيم $(i = 1, 2, \ldots, s)$ ، فإنه يكون

$$\text{then } AB = \text{diag}(A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_sB_s).$$

مسائل محلولة

١ – بما أن

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & & a_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \ldots & a_{11}b_{1n} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} & \ldots & a_{22}b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{mm}b_{m1} & a_{mm}b_{m2} & \ldots & a_{mm}b_{mn} \end{bmatrix}$$

فإن حاصل الضرب AB لمصفوفة مربعة قطرية $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{mm})$ درجتها m بأى مصفوفة B ذات الدرجة $m \times n$ نحصل عليه بضرب الصف الأول من B فى a_{11} والصف الثانى منها فى a_{22} وهكذا . . . .

٢ - برهن أن المصفوفتين $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix}$ تبديليتين لكل قيم a, b, c, d

إن هذا ينتج عن :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac+bd & ad+bc \\ bc+ad & bd+ac \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

٣ - برهن أن $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ متساوية القوى .

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = A$$

٤ - برهن أنه إذا كان $A = AB$ و $B = BA$ فإن A و B تكونا متساويتا القوى .

إن $ABA = (AB)A = A \cdot A = A^2$ و $ABA = A(BA) = AB = A$; وعلى ذلك $A^2 = A$ أى أن A متساوية القوى .

استخدم حاصل الضرب BAB لكى تبرهن أن B مصفوفة متساوية القوى .

٥ - برهن أن $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ معدومة القوى من الدرجة 3 .

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = 0$$

٦ - إذا كانت A مصفوفة معدومة القوى ذات الدليل 2 نبرهن أن $A(I \pm A)^n = A$ لأى عدد صحيح موجب n .

بما أن $A^2 = 0,\ A^3 = A^4 = \dots = A^n = 0$. فإن $A(I \pm A)^n = A(I \pm nA) = A \pm nA^2 = A.$

٧ - إذا فرضنا A و B و C مصفوفات مربعة تحقق $AB = I$ و $CA = I$ فإنه ينتج عن العلاقة $(CA)B = C(AB)$ أن $B = C$. وعلى ذلك $B = C = A^{-1}$ هى المعكوس الوحيد للمصفوفة A (ما هى المصفوفة B^{-1} ؟) .

٨ - برهن أن : $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

بالتعريف $(AB)^{-1}(AB) = (AB)(AB)^{-1} = I.$ والآن

$$(B^{-1} \cdot A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1} \cdot A)B = B^{-1} \cdot I \cdot B = B^{-1} \cdot B = I$$

و

$$AB(B^{-1} \cdot A^{-1}) = A(B \cdot B^{-1})A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

واستنادا إلى المسألة ٧ فإن $(AB)^{-1}$ وحيدة . أى : $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

٩ - برهن ما يلى : تكون المصفوفة A مصفوفة ملتفة فيما إذا (وإذا فقط) كان $(I - A)(I + A) = 0$

لنفرض: $(I - A)(I + A) = I - A^2 = 0$ فينتج عن ذلك أن $A^2 = I$ وأن A مصفوفة ملتفة .

لنفرض أن A مصفوفة ملتفة فينتج عن هذا أن $A^2 = I$ و $(I - A)(I + A) = I - A^2 = I - I = 0$.

١٠ - برهن أن $(A + B)' = A' + B'$

لنفرض $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ يكفينا أن نبرهن أن العنصر الواقع فى الصف ذى الرقم i والعمود j من المصفوفات A', B' و $(A + B)'$ هى على الترتيب a_{ji} و b_{ji} و $a_{ji} + b_{ji}$.

١١ – برهن أن : $(A\,B)' = B'\,A'$.

بفرض $A = [\,a_{ij}\,]$ مصفوفة درجتها $m\times n$ و $B = [\,b_{ij}\,]$ مصفوفة درجتها $n\times p$
فإن $C = AB = [\,C_{ij}\,]$ مصفوفة درجتها $m\times p$. إن العنصر الواقع فى الصف ذى الرقم i والعمود ذى الرقم j من AB هو $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj}$ وهو أيضا العنصر الواقع فى الصف ذى الرقم j والعمود ذى الرقم i من المصفوفة $(AB)'$.

إن عناصر الصف ذى الرقم j من B' هى $b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{nj}$ وإن عناصر العمود ذى الرقم i من A' هى $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$.
إذن العنصر الواقع فى الصف ذى الرقم j والعمود ذى الرقم i من $B'\,A'$ هو :

$$\sum_{k=1}^{n} b_{kj}\cdot a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj} = c_{ij}$$

وهذا يؤدى إلى أن : $(A\,B)' = B'\,A'$.

١٢ – برهن أن : $(ABC)' = C'\,B'\,A'$.

اكتب $ABC = (AB)\,C$ واستنتج من المسألة ١١ أن : $(ABC)' = \{(AB)C\}' = C'(AB)' = C'B'A'$.

١٣ – برهن أنه إذا كانت $A=[a_{ij}]$ مصفوفة مربعة من الدرجة n فإن $B=[b_{ij}] = A + A'$ تكون مصفوف متماثلة

البرهان الأول :

إن العنصر الواقع فى الصف ذى الرقم i والعمود ذى الرقم j من A هو a_{ij} وإن العنصر المناظر له فى A' هو a_{ji} إذن $b_{ij} = a_{ji}+a_{ji}$ إن العنصر الواقع فى الصف ذى الرقم j والعمود ذى الرقم i من A هو a_{ji} وإن العنصر المناظر له من A' هو a_{ij} . إذن $b_{ji} = a_{ji} + a_{ij}$ أى أن $b_{ij} = b_{ji}$ وإن B مصفوفة متماثلة .

البرهان الثانى :

استنادا إلى المسألة ١٠ نجد $(A+A')' = A' + (A')' = A' + A = A + A'$ أى أن $(A + A')$ هى مصفوفة متماثلة .

١٤ – برهن أنه إذا كانت A و B مصفوفتين مربعتين متماثلتين فإن AB تكون مصفوفة متماثلة إذا (وإذا فقط) كانت المصفوفتان A و B تبديليتين .

لنفرض أن A و B تبديليتان أى $AB = BA$. فيكون $(AB)' = B'A' = BA = AB$ أى أن AB متماثلة .
لنفرض أن AB متماثلة أى $AB = (AB)'$ الآن $(AB)' = B'A' = BA$ وينتج عن ذلك أن $AB = BA$ وأن المصفوفتين A و B تبديليتان .

١٥ – برهن أنه إذا كانت المصفوفة المربعة A ذات الدرجة m متماثلة (متماثلة تخالفية) وإذا كانت المصفوفة P من الدرجة $m\times n$ فإن $B = P'AP$ مصفوفة متماثلة (متماثلة تخالفية) .

إذا كانت A متماثلة (انظر المسألة ١٢) ، فإن $B' = (P'AP)' = P'A'(P')' = P'A'P = P'AP$ وينتج عن هذا أن B متماثلة .

إذا كانت A متماثلة تخالفية فإن $B' = (P'AP)' = -P'AP$ وينتج عن ذلك أن B متماثلة تخالفية .

١٦ – برهن أنه إذا كانت A و B مصفوفتين مربعتين من درجة n فإن A و B تبديليتان إذا (وإذا فقط) كان $A-kI$ و $B-kI$ تبديلتين لأى قيمة للعدد k .

لنفرض أن A و B تبديليتان أى $AB = BA$ وعلى ذلك

$$\begin{aligned}(A-kI)(B-kI) &= AB - k(A+B) + k^2I \\ &= BA - k(A+B) + k^2I = (B-kI)(A-kI)\end{aligned}$$

وينتج عما تقدم أن $A-kI$ و $B-kI$ تبديليتان .

لنفرض أن $A-kI$ و $B-kI$ تبديليتان فيكون :

$$\begin{aligned}(A-kI)(B-kI) &= AB - k(A+B) + k^2I \\ &= BA - k(A+B) + k^2I = (B-kI)(A-kI)\end{aligned}$$

ونجد أن $AB = BA$ وهذا يعنى أن A و B تبديلتان .

مسائل اضافية

١٧ – برهن أن حاصل ضرب مصفوفتين مثلثيتين علويتين (سفليتين) هومصفوفة مثلثية علوية (سفلية) .

١٨ – استنتج قاعدة لتكوين حاصل الضرب BA المصفوفة B ذات الدرجة $m \times n$ بالمصفوفة القطرية : $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.
إرشاد : أنظر المسألة ١

١٩ – برهن أنه يمكن كتابة المصفوفة العددية التى عناصرها قطرها هى العدد k بالشكل kI وأن $kA = kIA = \text{diag}(k, k, \ldots, k)\ A$,
حيث تساوى درجة I عدد صفوف المصفوفة A .

٢٠ – إذا كانت A مصفوفة مربعة درجتها n نبرهن أن $A^p \cdot A^q = A^q \cdot A^p$ حيث p و q عددادن صحيحان موجبان .

٢١ – (ا) برهن أن $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ متساويتا القوى .

(ب) استعمل A و B لتبرهن على أن عكس المسألة ٤ غير صحيح .

٢٢ – إذا كانت A مصفوفة متساوية القوى فبرهن أن $B = I-A$ متساوية القوى . وأن $AB = BA = 0$:

٢٣ – (ا) إذا كان $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ فبرهن أن $A^2 - 4A - 5I = 0$.

(ب) إذاكان $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ فبرهن أن $A^3 - 2A^2 - 9A = 0$. لكن $A^2 - 2A - 9I \neq 0$.

٢٤ – برهن أن $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^4 = I$.

٢٥ – برهن أن $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ مصفوفة دورية دورتها 2

٢٦ – برهن أن $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ معدومة القوى .

٢٧ – برهن أن (ا) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -6 \\ 3 & 2 & 9 \\ -1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$ تبديليتان

(ب) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & -1/3 \\ -3/5 & 2/5 & 1/5 \\ 7/15 & -1/5 & 1/15 \end{bmatrix}$ تبديليتان

٢٨ – برهن أن $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ تبديليتان عكسيا وأن $(A+B)^2 = A^2 + B^2$.

٢٩ – برهن أن كلا من المصفوفات $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ تبديلية عكسيا كل مع الأخرى .

٣٠ – برهن أن المصفوفات الوحيدة التبديلية مع كل مصفوفة مربعة من الدرجة n هى المصفوفات المربعة العددية من الدرجة n

٣١ – (ا) أوجد كل المصفوفات التبديلية مع $\text{diag}(1, 2, 3)$

(ب) أوجد كل المصفوفات التبديلية مع $\text{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.

الجواب (ا) $\text{diag}(a, b, c)$ حيث a, b, c هى اختيارية .

٣٢ – برهن أن (ا) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$ هى معكوس $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ هى معكوس $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 8 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

٣٣ – افرض $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ لإيجاد معكوس $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ الجواب $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

٣٤ – برهن أن معكوس مصفوفة قطرية A لا يساوى أى عنصر فى قطرها الصفر ، هو مصفوفة قطرية عناصر قطرها ، معكوسات عناصر قطر A وواقعة بالترتيب الأصلى ذاته وهى من درجة A نفسها وبصورة خاصة يكون معكوس I_n هو I_n نفسها .

٣٥ – برهن أن $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$ ملتفتان .

٣٦ – بالتجزئ أكتب $\begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ A_{21} & -I_2 \end{bmatrix} = A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & -1 & 0 \\ c & d & 0 & -1 \end{bmatrix}$. برهن أن $A^2 = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} = I_4$.

٣٧ – برهن أن (ا) $(A')' = A$, (ب) $(kA)' = kA'$, (جـ) $(A^p)' = (A')^p$ حيث p عدد صحيح موجب .

٣٨ – برهن أن $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$. رشاد . . . اكتب : $(AB)\ C$ $A\ B\ C$.

٣٩ – برهن (ا) $(A^{-1})^{-1} = A$, (ب) $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$, (جـ) $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$ حيث p عدد صحيح موجب .

٤٠ – برهن أن كل مصفوفة حقيقية متماثلة هى مصفوفة هيرميتية .

٤١ – برهن أن (ا) $\overline{(\bar{A})} = A$, (ب) $\overline{(A+B)} = \bar{A} + \bar{B}$, (جـ) $\overline{(kA)} = \bar{k}\,\bar{A}$, (د) $\overline{(AB)} = \bar{A}\,\bar{B}$.

٤٢ – برهن أن (ا) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 2+3i \\ 1-i & 2 & -i \\ 2-3i & i & 0 \end{bmatrix}$ هيرميتية .

(ب) $B = \begin{bmatrix} i & 1+i & 2-3i \\ -1+i & 2i & 1 \\ -2-3i & -1 & 0 \end{bmatrix}$ هيرميتية متخالفة .

(جـ) iB هيرميتية .

(د) $\bar{A}$ هيرميتية و $\bar{B}$ هيرميتية متخالفة .

٤٣ – إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n فبرهن أن (ا) $A\bar{A}'$ و $\bar{A}'A$ متماثلتان (ب) $A+\bar{A}'$ و $\overline{AA}$ و $A\bar{A}$ هيرميتية .

٤٤ – برهن أنه إذا كانت H مصفوفة هيرميتية وكانت A أى مصفوفة متوافقة بالنسبة للضرب فإن HA $(\bar{A})'$ تكون مصفوفة هيرميتية .

٤٥ – برهن أنه يمكن كتابة كل مصفوفة هيرميتية A بالشكل $B + i\,C$ حيث B مصفوفة حقيقية متماثلة و C مصفوفة حقيقية متماثلة تخالفية .

٤٦ – برهن (ا) أنه يمكن كتابة كل مصفوفة هيرميتية تخالفية A بالشكل $A = B + i\,C$ حيث B حقيقية متماثلة تخالفية و C مصفوفة متماثلة حقيقية .

(ب) وأن $\bar{A}'A$ تكون حقيقية إذا (وإذا فقط) كانت B و C متبادلتين عكسيا .

٤٧ – برهن أنه إذا كانت A و B تبديليتين فإن A^{-1} , B^{-1} ; A' , B' ; $\bar{A}'$, $\bar{B}'$ تكون ثلاثة أزواج تبديلية من المصفوفات .

٤٨ – برهن أنه لقيم m و n الصحيحة الموجبة تكون A^m و B^n تبديليتين فيما إذا كانت المصفوفتان A و B تبديليتين .

٤٩ – برهن أن (ا) $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{1}{2}n(n-1)\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$

٥٠ – برهن أنه إذا كانت A متماثلة أو متماثلة تخالفية فإن $AA' = A'A$ و A^2 متماثلتان .

٥١ – إذا كانت $a, b, \ldots, g$ مقادير عددية p عدد صحيح موجب ، فأثبت أنه إذا كانت A متماثلة فإن $aA^p + bA^{p-1} + \ldots + gI$ تكون متماثلة أيضا .

٥٢ – برهن أنه يمكن كتابة كل مصفوفة مربعة A بالشكل $A = B + C$ حيث B مصفوفة هيرميتية و C مصفوفة هيرميتية متخالفة .

٥٣ – برهن أنه إذا كانت A مصفوفة حقيقية متماثلة تخالفية أو إذا كانت A مصفوفة مركبة وهيرميتية تخالفية فإن $\pm\, iA$ هيرميتية .

٥٤ – برهن أنه يمكن ذكر النظرية الواردة في المسألة ٥٢ بالشكل التالى :

يمكن كتابة كل مصفوفة مربعة A بالشكل $A = B + iC$ حيث B و C مصفوفتان هيرميتيتان .

٥٥ – برهن أنه إذا حققت كل من A و B العلاقتين $AB = A$ و $BA = B$ فإن (ا) $B'A' = A'$, $A'B' = B'$ (ب) A', B' مصفوفتان متساويتا القوى . (ج) $A = B = I$ وذلك إذا كان لـ A معكوس .

٥٦ – إذا كانت A مصفوفة ملتفة فبرهن أن $(I + A)\,{}^1\!/_2$ و $(I - A)\,{}^1\!/_2$ مصفوفتان متساويتا القوى وأن $\frac{1}{2}(I + A) \cdot \frac{1}{2}(I - A) = 0$.

٥٧ – إذا كان لمصفوفة مربعة A معكوس A^{-1} فبرهن أن :

(ا) $(A^{-1})' = (A')^{-1}$ و (ب) $(\bar{A})^{-1} = \overline{A^{-1}}$ و (ج) $(\bar{A}')^{-1} = \overline{(A^{-1})}'$

إرشاد : (ا) يمكن باستخدام منقول $AA^{-1} = I$ وإيجاد $(A^{-1})'$ كمعكوس للمصفوفة A'

٥٨ – أوجد كل مصفوفة قابلة للمبادلة مع (ا) diag(1, 1, 2, 3) (ب) diag(1, 1, 2, 2).

الجواب : (ا) diag(A, b, c)، (ب) diag(A, B) حيث A و B مصفوفتان مربعتان من الدرجة الثانية عناصرهما اختيارية و c و b مقداران عدديان .

٥٩ – إذا كانت $A_1, A_2, \ldots, A_s$ مصفوفات عددية درجتها على الترتيب $m_1, m_2, \ldots, m_s$ ، فأوجد كل المصفوفات القابلة للمبادلة مع $\text{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_s)$

الجواب : $\text{diag}(B_1, B_2, \ldots, B_s)$ حيث $B_1, B_2, \ldots, B_s$ مصفوفات درجتها على الترتيب $m_1 + m_2 = m$ وعناصرها اختيارية .

٦٠ – إذا كان $AB = 0$ حيث A و B مصفوفتان مربعتان غير صفريتين ، فإننا نقول إن A و B قاسمان للصفر . برهن أن المصفوفتين A و B الواردتين في المسألة ٢١ قاسمان للصفر .

٦١ – إذا كان $A = \text{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_s)$ و $B = \text{diag}(B_1, B_2, \ldots, B_s)$ حيث A_i و B_i من نفس الدرجة ، $(i=1, 2, \ldots, s)$ فبرهن أن :

(أ) $A + B = \text{diag}(A_1+B_1, A_2+B_2, \ldots, A_s+B_s)$

(ب) $AB = \text{diag}(A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_sB_s)$

(ج) $\text{trace } AB = \text{trace } A_1B_1 + \text{trace } A_2B_2 + \ldots + \text{trace } A_sB_s$.

٦٢ – برهن أنه إذا كانت A و B مصفوفتين مربعتين من درجة n متماثلتين تخالفيتين فإن AB تكون متماثلة إذا (وإذا فقط) كانت A و B تبديليتين .

٦٣ – برهن أنه إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n وكان $B = rA + sI$ حيث r و s مقداران عدديان ، فإن A و B تبديليتان .

٦٤ – لنفرض أن A و B مصفوفتان مربعتان من الدرجة n وأن r_1, r_2, s_1, s_2 مقادير عددية بحيث يكون $r_1s_2 \neq r_2s_1$. برهن أن المصفوفتين $C_1 = r_1A + s_1B, \ C_2 = r_2A + s_2B$ تبديليتين ، إذا (وإذا فقط) كانت A و B تبديليتين .

٦٥ – برهن أن مصفوفة مربعة A درجتها n لا يكون لها معكوس إذا (أ) كانت عناصر صف (عمود) منها معدومة أو (ب) كان صفان (عمودان) منها متساويين أو (ج) كان صف (عمود) مساويا مجموع صفين (عمودين) آخرين فيهما .

٦٦ – إذا كانت A و B مصفوفتين مربعتين من الدرجة n وكان لـ A معكوس فبرهن أن :

$$(A+B)A^{-1}(A-B) = (A-B)A^{-1}(A+B)$$

الفصل الثالث

محددة مصفوفة مربعة

التبـــادل : اعتبر التباديل $6 = !3$ للأعداد الطبيعية 1,2,3 مأخوذة كلها

123   132   213   231   312   321   (3.1)

وثمانية تباديل من أصل التباديل $24 = !4$ للأعداد الطبيعية 1,2,3,4 مأخوذة كلها :

1234   2134   3124   4123
1324   2314   3214   4213   (3.2)

إذا وقع عدد طبيعي فى تبديل ، قبل آخر يصغره ، نقول إنه يوجد **تعاكس** . وإذا كان ، فى تبديل ما ، عدد التعاكسات زوجيا (فرديا) فإننا نسمى هذا التبديل بأنه زوجى (فردى) . مثال ذلك فى (3.1) ، نجد أن التبديل 123 زوجى لأنه لا يحوى تعاكسات وأن التبديل 132 فردى لأن العـــدد 3 يسبق العدد 2 وأن التبديل 312 زوجى لأن فيه العدد 3 يسبق العدد 1 والعدد 3 يسبق العدد 2 . أما فى (3.2) ، فإن التبديل 4213 زوجى لأن العدد 4 يسبق العدد 2 والعدد 4 يسبق العدد 1 والعدد 4 يسبق العدد 3 وأخيرا العدد 2 يسبق العـدد 1 .

محددة مصفوفة مربعة : اعتبر المصفوفة المربعة من الدرجة n :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \cdots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\, a_{n2}\, a_{n3} \cdots a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (3.3)$$

وحاصل الضرب .

$$a_{1j_1}\, a_{2j_2}\, a_{3j_3} \cdots a_{nj_n} \qquad (3.4)$$

لـ n من عناصر هذه المصفوفة ، اختيرت بأخذ عنصر واحد فقط من كل صف وعنصر واحد فقط من كل عمود من هذه المصفوفة . فى (3.4) تم ترتيب العوامل ، كما هو معتاد ، بحيث تكون متوالية الدليل الأول لهذه العوامل بالترتيب الطبيعى $1,2,\ldots,n$ إن المتوالية $j_1, j_2, \ldots, j_n$ للدليل الثانى هى واحدة من متبادلات الأعداد $1, 2,\ldots, n$ والتى يساوى عددها n (سيزداد القارئ خبرة لو أجرى موازيا للعمل الوارد فى هذا الكتاب ، برهانا آخر يستعمل فيه حاصل ضرب حيث تكون متوالية الدليل الثانى مرتبة بالترتيب الطبيعى) .

لأى تبديل معين $j_1, j_2, \ldots, j_n$ لأدلة العوامل الثانية ، نفرض $\epsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} = +1$ أو -1 بحسب مايكون هذا التبديل زوجيا أو فرديا ولنكتب حاصل الضرب المذكور مزودا بإشارة :

$$\epsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n}\, a_{1j_1}\, a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \qquad (3.5)$$

نعنى **بمحددة** A ونرمز لها بالرمز $|A|$ ، مجموع كل حواصل الضرب التى من الشكل (3.5) والمسماة **بحدود** $|A|$ والتى يمكن تكوينها من عناصر A وأى

$$|A| = \sum_{\rho} \epsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n}\, a_{1j_1}\, a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \qquad (3.6)$$

حيث يشمل التجميع على $j_1, j_2, \ldots, j_n$ تباديل الأعداد الطبيعية $1,2,\ldots,n$ وإن عدد هذه التباديل يسوى $\rho = n$

تسمى محددة المصفوفة المربعة من الدرجة n محددة من الدرجة n .

المحددة من الدرجة الثانية والدرجة الثالثة :

من (3.6) فى حالة $n = 2$ و $n = 3$ نحصل على

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \epsilon_{12}\, a_{11}a_{22} + \epsilon_{21}\, a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (3.7)$$

و

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \epsilon_{123}\, a_{11}a_{22}a_{33} + \epsilon_{132}\, a_{11}a_{23}a_{32} + \epsilon_{213}\, a_{12}a_{21}a_{33} \\ &\quad + \epsilon_{231}\, a_{12}a_{23}a_{31} + \epsilon_{312}\, a_{13}a_{21}a_{32} + \epsilon_{321}\, a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ &\quad + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned} \qquad (3.8)$$

مثال ١ :

ا -
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot4 - 2\cdot3 = 4 - 6 = -2$$

ب -
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot0 - (-1)3 = 0 + 3 = 3$$

جـ -
$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} &= 2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2(0\cdot0 - 1\cdot1) - 3(1\cdot0 - 1\cdot2) + 5(1\cdot1 - 0\cdot2) = 2(-1) - 3(-2) + 5(1) = 9 \end{aligned}$$

د -
$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & -6 \end{vmatrix} &= 2\{0(-6) - (-2)(-5)\} - (-3)\{1(-6) - (-2)0\} + (-4)\{1(-5) - 0\cdot0\} \\ &= -20 - 18 + 20 = -18 \end{aligned}$$

أنظر المسألة ١

خواص المحددات :

فى كل موضع من هذا البند ، نعنى بـ A مصفوفة مربعة يعطى محددها $|A|$ بالعلاقة (3.6) .

لنفرض أن كل عنصر من الصف ذى الرقم i (كل عنصر من العمود ذى الرقم j) يساوى الصفر . بما أن كل حد من حدود المجموع (3.6) يحوى عنصرا من هذا الصف (العمود) فإن كل عنصر من هذا المجموع يساوى الصفر ونستنتج من ذلك :

I. إذا كان كل عنصر من صف (عمود) فى مصفوفة مربعة ، مساويا الصفر ، فإن $|A| = 0$.

ليكن A' منقول المصفوفة A نرى أن كل حد من (3.6) يمكن الحصول عليه من A' بأن نختار العوامل بالترتيب من العمود الأول ثم الثانى .... ثم الأخير أى :

II. إذا كانت A مصفوفة مربعة فإن $|A'| = |A|$ وهذا يعنى أنه ، لكل نظرية تتعلق بصفوف محددة ، يوجد نظرية مناظرة تتعلق بأعمدة هذه المحددة والعكس بالعكس .

لتكن B المصفوفة التى تنتج من A بضرب كل عنصر من عناصر صفها ذى الرقم i بالعدد k بما أن كل حد من مفكوك $|B|$ يحوى عنصرا واحدا فقط من عناصر هذا الصف فإنه ينتج عن لك، أن كل حد من هذا المفكوك يحوى k كعامل ويكون :

$$|B| = k \sum_{\rho} \{\epsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}\} = k|A|$$

لذلك ،

III. إذا ضربنا كل عنصر من عناصر صف (عمود) المحددة $|A|$ بالعدد k فإن المحددة تضرب فى k إذا حوى كل عنصر من عناصر صف (عمود) المحددة $|A|$ العامل (المضروب) k فإنه يمكن وضع k كمضروب مشترك فى $|A|$

مثال ذلك :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix}$$

لنرمز بالرمز B المصفوفة التى تنتج عن A بالمبادلة بين الصفين اللذين يحملان الرقين i و $i+1$. إن كل حاصل ضرب فى (3.6) المتعلق بـ $|A|$ هو حاصل ضرب فى $|B|$ والعكس بالعكس أى ، بإهمال الإشارات، يمكننا أن نقول إن (3.6)' هو مفكوك $|B|$. عند عد التعاكسات فى دليل أى حد من (3.6) كحد فى $|B|$ فإننا نلاحظ أن وضع $i+1$ قبل i يعطى تعاكسا إضافيا وعلى ذلك فكل مضروب فى (3.6) مع تغيير إشارته هو حد من حدود $|B|$ ويكون $|A| - = |B|$ أى :

IV. إذا نتج B عن A بالمبادلة بين صفين (عمودين) متجاورين فإنه يكون $|A| - = |B|$.

كنتيجة للنظرية IV نجـد :

V. إذا نتج B من A بالمبادلة بين أى صفين (عمودين) منه فإن $|A| - = |B|$.

VI. إذا نتج B عن A بإمرار الصف (العمود) ذى الرقم i فوق p صفا (عمودا) من A فإنه يكون :

$$|B| = (-1)^p |A|$$

VII. إذا كان صفان (عمودان) من A متطابقين فإن $0 = |A|$.

لنفرض أن كل عنصر من عناصر الصف الأول من A مكونا من مجموع حدين : $a_{1j} = b_{1j} + c_{1j}$,

حيث $(j = 1, 2, \dots, n)$. فإنه يكون :

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{\rho} \epsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} (b_{1j_1} + c_{1j_1}) a_{2j_2} a_{3j_3} \dots a_{nj_n} \\ &= \sum_{\rho} \epsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} b_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \dots a_{nj_n} + \sum_{\rho} \epsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} c_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \dots a_{nj_n} \\ &= \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

على وجـه العموم

VIII. إذا كان كل عنصر من عناصر الصف (العمود) ذى الرقم i من A مجموع p حدا فإنه يمكن كتابة $|A|$ كمجموع p محددة .

إن عناصر الصف (العمود) ذى الرقم j من هذه المحددات على الترتيب العناصر الأولى ، الثانية ... الأخيرة من المجاميع المذكورة ، أما بقية الصفوف (الأعمدة) فتبقى هى نفسها الموجودة فى A .

إن النظرية الأكثر استعمالا هى التالية :

IX. إذا أنتجت المصفوفة B من المصفوفة A ، بإضافة عناصر الصف (العمود) ذى الرقم i بعد ضربها بعدد ثابت إلى العناصر المناظرة لصف (عمود) آخر من A ، فإنه يكون $|A| = |B|$.

مثال ذلك :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{21} & a_{32}+ka_{22} & a_{33}+ka_{23} \end{vmatrix}$$

أنظر المسائل ٢ — ٧

المصغرات الأول والمعاملات المرافقة :

لتكن المصفوفة المربعة A ذات الدرجة n المعطاة فى (3.3) ومحددتها $|A|$ المعطاة بالعلاقة (3 - 6) إذا حذفنا من A عناصر صفة ذى الرقم i وعموده ذى الرقم j فإننا نسمى محددة المصفوفة المربعة ذات الدرجة $(n-1)$ الناتجة ، **المصغر الأول** للمصفوفة A أو للمحددة $|A|$ ونرمز له بالرمز $|M_{ij}|$ وكثيراً ما نسميه مصغر a_{ij} . تسمى المصغر مزودا بإشارته $(-1)^{i+j}\,|M_{ij}|$ **بالمعامل المرافق** للعنصر a_{ij} ونرمز له بالرمز α_{ij} .

مثال ١ : إذا كان

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

فإن

$$|M_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad |M_{12}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad |M_{13}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\alpha_{11} = (-1)^{1+1}|M_{11}| = |M_{11}|, \quad \alpha_{12} = (-1)^{1+2}|M_{12}| = -|M_{12}|,$$
$$\alpha_{13} = (-1)^{1+3}|M_{13}| = |M_{13}|$$

وتأخذ عندها العلاقة (3.8) الشكل :

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}|M_{11}| - a_{12}|M_{12}| + a_{13}|M_{13}| \\ &= a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{12} + a_{13}\alpha_{13} \end{aligned}$$

فى المسألة ٩ نبرهن النظرية التالية :

X. إن قيمة المحددة $|A|$ حيث A هى المصفوفة المعطاة فى (3.3) تساوى مجموع حواصل الضرب التى نحصل عليها بضرب كل عنصر من عناصر صف (عمود) من المعامل المرافق له أى :

$$|A| = a_{i1}\alpha_{i1} + a_{i2}\alpha_{i2} + \cdots + a_{in}\alpha_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\alpha_{ik} \qquad (3.9)$$

$$= a_{1j}\alpha_{1j} + a_{2j}\alpha_{2j} + \cdots + a_{nj}\alpha_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\alpha_{kj} \qquad (i, j, = 1, 2, \ldots, n) \quad (3.10)$$

باستخدام النظرية VII يمكننا أن نبرهن :

XI. إن مجموع حواصل الضرب المكونة من ضرب عناصر صف (عمود) من المصفوفة المربعة A ذات الدرجة n بالمملات المرافقة لعناصر صف (عمود) آخر من A يساوى الصفر .

مثال ٢ : إذا كانت A مصفوفة المثال ٢ فإنه يكون :

$$a_{31}\alpha_{31} + a_{32}\alpha_{32} + a_{33}\alpha_{33} = |A|$$

و

$$a_{12}\alpha_{12} + a_{22}\alpha_{22} + a_{32}\alpha_{32} = |A|$$

بينما نجـد :

$$a_{31}\alpha_{21} + a_{32}\alpha_{22} + a_{33}\alpha_{23} = 0$$

و

$$a_{12}\alpha_{13} + a_{22}\alpha_{23} + a_{32}\alpha_{33} = 0$$

أنظر المسألتين ١٠-١١

المصغرات والمتممات الجبرية :

لتكن المصفوفة(3 . 3) ولنفرض أن $i_1, i_2, \ldots, i_m$ مرتبة بالترتيب المتزايد هى m، حيث ($n>m\geq 1$) دليل من أدلة الصفوف $1, 2, \ldots, n$ نفرض أيضا أن ، $j_1, j_2, \ldots, j_m$ مرتبة بالترتيب المتزايد هى m دليل من أدلة أعمدة ولنفرض أخيرا أن الصفوف والأعمدة الباقية مرتبة أيضا بالترتيب المتزايد هى $j_{m+1}, j_{m+2}, \ldots, j_n$ و $i_{m+1}, i_{m+2}, \ldots, i_n$ على الترتيب . إن مثل هذا الفصل لأدلة الصفوف والأعمدة يعين ، بشكل وحيد ، المصفوفتين :

$$A^{j_1, j_2, \ldots, j_m}_{i_1, i_2, \ldots, i_m} = \begin{bmatrix} a_{i_1, j_1} & a_{i_1, j_2} & \cdots & a_{i_1, j_m} \\ a_{i_2, j_1} & a_{i_2, j_2} & \cdots & a_{i_2, j_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_m, j_1} & a_{i_m, j_2} & \cdots & a_{i_m, j_m} \end{bmatrix} \qquad (3.11)$$

و

$$A^{j_{m+1}, j_{m+2}, \ldots, j_n}_{i_{m+1}, i_{m+2}, \ldots, i_n} = \begin{bmatrix} a_{i_{m+1}, j_{m+1}} & a_{i_{m+1}, j_{m+2}} & \cdots & a_{i_{m+1}, j_n} \\ a_{i_{m+2}, j_{m+1}} & a_{i_{m+2}, j_{m+2}} & \cdots & a_{i_{m+2}, j_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_n, j_{m+1}} & a_{i_n, j_{m+2}} & \cdots & a_{i_n, j_n} \end{bmatrix} \qquad (3.12)$$

واللتان تسميان المصفوفتين الجزئيتين للمصفوفة A .

نسمى محددة كل من هاتين المصفوفتين الجزئيتين **مصغراً** لـ A ونسمى زوج المصغرين $\left| A^{j_1, j_2, \ldots, j_m}_{i_1, i_2, \ldots, i_m} \right|$ و $\left| A^{j_{m+1}, j_{m+2}, \ldots, j_n}_{i_{m+1}, i_{m+2}, \ldots, i_n} \right|$ **بالمصغرين المتممين** لـ A وكل واحد منهما متمم للآخر .

مثال ٣ : المصفوفة المربعة من الدرجة الخامسة $A = [\ a_{ij}\ ]$ تكون المحددتان .

$$\left| A^{1,3}_{2,5} \right| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{51} & a_{53} \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad \left| A^{2,4,5}_{1,3,4} \right| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} & a_{15} \\ a_{32} & a_{34} & a_{35} \\ a_{42} & a_{44} & a_{45} \end{vmatrix}$$

زوجا من المصغرات المتتامة .

إذا فرضنا

$$p = i_1 + i_2 + \cdots + i_m + j_1 + j_2 + \cdots + j_m \quad (3.13)$$

و

$$q = i_{m+1} + i_{m+2} + \cdots + i_n + j_{m+1} + j_{m+2} + \cdots + j_n \quad (3.14)$$

فإننا نسمى المصغر ذا الإشارة $(-1)^p \left| A^{j_1, j_2, \ldots, j_m}_{i_1, i_2, \ldots, i_m} \right|$ المتمم الجبرى لـ : $\left| A^{j_{m+1}, j_{m+2}, \ldots, j_n}_{i_{m+1}, i_{m+2}, \ldots, i_n} \right|$

وأن $(-1)^q \left| A^{j_{m+1}, j_{m+2}, \ldots, j_n}_{i_{m+1}, i_{m+2}, \ldots, i_n} \right|$ هو المتمم الجبرى لـ $\left| A^{j_1, j_2, \ldots, j_m}_{i_1, i_2, \ldots, i_m} \right|$

مثال ٤ : للمصغرين الواردين فى المثال ٣ يكون $\left| A^{1,3}_{2,5} \right| - = \left| A^{1,3}_{2,5} \right| ^{2+5+1+3}(-1)$ هو المتمم الجبرى لـ $\left| A^{2,4,5}_{1,3,4} \right|$ وأن $\left| A^{2,4,5}_{1,3,4} \right| - = \left| A^{2,4,5}_{1,3,4} \right| ^{1+3+4+2+4+5}(-1)$ هو المتمم الجبرى ـ $\left| A^{1,3}_{2,5} \right|$. يلاحظ أن الإشارة المعطاة لاثنين من المصغرات المتتامة واحدة هل هذا صحيح دوما ؟

عندما يكون $m = 1$ فإن (3.11) تصبح $A^{j_1}_{i_1} = \left[a_{i_1 j_1} \right]$ و $\left| A^{j_1}_{i_1} \right| = a_{i_1 j_1}$ ، عنصرا من A .

يكتب المصغر المتمم $\left| A^{j_2, j_3, \ldots, j_n}_{i_2, i_3, \ldots, i_n} \right|$ بالشكل $\left| M_{i_1, j_1} \right|$ الوارد فى البند السابق ويصبح المتمم الجبرى هو المعامل المرافق $\alpha_{i_1 j_1}$.

يسمى مصغر A الذى عناصره القطرية هى عناصر قطرية فى A ، مصغراً رئيسيا لـ A . إن المتمم الجبرى لمصغر رئيسى لـ A هو أيضا مصغر رئيسى لـ A ، إن المتمم الجبرى لمصغر رئيسى هو متممة نفسه .

مثال ٥ : فى المصفوفة المربعة ذات الدرجة الخامسة $A = [a_{ij}]$ نجد أن :

$$\left| A^{1,3}_{1,3} \right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad ; \quad \left| A^{2,4,5}_{2,4,5} \right| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} & a_{25} \\ a_{42} & a_{44} & a_{45} \\ a_{52} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

مصغران رئيسيان متتامان لـ A . ما هو المتمم الجبرى لكل منهما ؟

إن التعابير مصغر ، مصغر متمم ، متمم جبرى ، ومصغر جبرى المعرفة سابقا للمصفوفة المربعة A ستستخدم بدون تغيير بالنسبة للمحددة $|A|$.

أنظر المسألتين ١٢-١٣

مسائل محلولة

ا -
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot4 - 3(-1) = 11$$

ب -
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = (1)\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = (1)(4\cdot7 - 5\cdot6) - 0 + 2(3\cdot6 - 4\cdot5)$$
$$= -2 - 4 = -6$$

جـ -
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix} = 1(4\cdot21 - 15\cdot6) + 6(3\cdot6 - 4\cdot5) = -18$$

د -
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1(3\cdot3 - 5\cdot1) = 4$$

٢ – أضف إلى عناصر العمود الأول العناصر المناظرة من بقية الأعمدة فنجد :

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

استنادا إلى النظرية I .

٣ – أضف العمود الثانى إلى الثالث ، احذف العامل المشترك مع العمود الثالث الناتج واستفد من النظرية VII فنجد :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

٤ – أضف إلى الصف الثالث ، الأول والثانى ، وبحذف العامل المشترك 2 ، واطرح الصف الثانى من الصف الثالث ، وطرح الصف الثالث من الصف الأول ، وطرح الصف الأول من الثانى ، وأخيرا بحمل الصف الثالث فوق بقية الصفوف فتجـد :

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ c_1+a_1 & c_2+a_2 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ a_1+b_1+c_1 & a_2+b_2+c_2 & a_3+b_3+c_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

٥ – بدون فك أثبت أن :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 & 1 \\ a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^2 & a_3 & 1 \end{vmatrix} = -(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1).$$

اطرح الصف الثانى من الأول فتجـد :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1^2-a_2^2 & a_1-a_2 & 0 \\ a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^2 & a_3 & 1 \end{vmatrix} = (a_1-a_2)\begin{vmatrix} a_1+a_2 & 1 & 0 \\ a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^2 & a_3 & 1 \end{vmatrix}$$

استنادا إلى النظرية III وإلى أن $a_1 - a_2$ عامل لـ $|A|$. بالمثل $a_2 - a_3$ و $a_3 - a_1$ يكونان عاملان . بما أن $|A|$ من الدرجة الثالثة بالنسبة لهذه الحروف فإنه يكون :

$$|A| = -(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1). \qquad \text{(i)}$$

إن حاصل ضرب العناصر القطرية $a_1^2 a_2$ هو حد من $|A|$ وينتج من (i) أن هذا الحد هو $ka_1^2a_2$. إذن $k = -1$ and $|A| = -(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)$. نلاحظ أن $|A|$ يتلاشى إذا (وإذا فقط) تساوى اثنان من a_1 , a_2 , a_3 .

٦ – برهن أنه إذا كانت A متماثلة تخالفية ومن درجة فردية $2p-1$ فإن $|A| = 0$.

بما أن A متماثلة تخالفية $A' = -A$ ، إذن $|A'| = |-A| = (-1)^{2p-1}|A| = -|A|$. ولكن استنادا إلى النظرية

II نجد أن $|A| = |A'|$ وينتج عن ذلك أن $|A| = -|A|$ و $|A| = 0$

٧ – برهن أنه إذا كانت A هرميتية ، فإن $|A|$ يكون عدداً حقيقياً :

بما أن A هرميتية فإنه يكون $\bar{A}' = A'$ استنادا إلى النظرية II وكذلك $|A| = |\bar{A}'| = |\bar{A}| = |A|$

ولكن إذا كان

$$|A| = \sum_{\rho} \epsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} = a + bi$$

فإن

$$|\bar{A}| = \sum_{\rho} \epsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} \bar{a}_{1j_1} \bar{a}_{2j_2} \dots \bar{a}_{nj_n} = a - bi$$

ولكن $|A| = |\bar{A}|$ يتطلب أن يكون $b = 0$ وعلى ذلك يكون $|A|$ عدداً حقيقياً .

٨ – فى المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$، يكون

$$\alpha_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad \alpha_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad \alpha_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$\alpha_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad \alpha_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad \alpha_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\alpha_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5, \quad \alpha_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad \alpha_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

يجدر بنا أن نلاحظ أن الإشارات التى أعطيت لمصغرات العناصر لتكوين المعاملات المرافقة تتبع الجدول التالى :

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

حيث تحتل كل إشارة نفس المكان الذى يحتله العنصر المراد الحصول على معامله المرافق فى A . اكتب جدول إشارات مشابه لمصفوفة مربعة من الدرجة الخامسة .

٩ – برهن : أن قيمة المحددة $|A|$ لمصفوفة مربعة من الدرجة n تساوى مجموع حواصل الضرب التى نحصل عليها بضرب كل عنصر من صف (عمود) من A بمعاملة المرافق .

سنثبت هذا لصف . إن حدود (٣–٦) والتى تحوى a_{11} كعامل هى :

$$a_{11} \sum \epsilon_{1, j_2 j_3 \dots j_n} a_{2j_2} a_{3j_3} \dots a_{nj_n} \qquad (\text{ا})$$

إن $\epsilon_{1, j_2 j_3 \dots j_n} = \epsilon_{j_2 j_3 \dots j_n}$ وذلك لأن العدد 1 فى التبديل $1, j_1, j_2, \dots j_n$، يقع فى الترتيب الطبيعى وينتج عن ذلك أنه يمكن كتابة (ا) بالشكل التالى :

$$a_{11} \sum_{\sigma} \epsilon_{j_2 j_3 \dots j_n} a_{2j_2} a_{3j_3} \dots a_{nj_n} \qquad (\text{ب})$$

حيث يمتد التجمع على $\sigma = (n-1)!$ تبديلا للأعداد $2, 3, \dots, n$ ويمكن نتيجة لذلك كتابة المجموع السابق بالشكل :

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}|M_{11}| \qquad (\text{ج})$$

لتكن المصفوفة B التى تنتج عن A بنقل العمود ذى الرقم s فوق الأعمدة ال $(s-1)$ الأول فينتج عن النظرية VI أن $|B| = (-1)^{s-1}|A|$. علاوة على ذلك فإن العنصر الذى يقع فى الصف الأول والعمود الأول فى B هو a_{1s} وإن مصغر a_{1s} فى B هو بالضبط المصغر $|M_{1s}|$ نفسه للعنصر a_{1s} من A . إذا استعدنا برهان العلاقة (جـ) فإننا نجد أن حدود $a_{1s}|M_{1s}|$ هى كلها حدود $|B|$ التى تحوى a_{1s} كعامل وينتج عن هذا أنها جميعا حدود $|A|(-1)^{s-1}$ والحاوية على a_{1s} كعامل . وهذا يؤدى إلى أن حدود $a_{1s}\{(-1)^{s-1}|M_{1s}|\}$ هى حدود المحددة $|A|$ التى تحوى a_{1s} كعامل أى :

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}\{(-1)^{1+1}|M_{11}|\} + a_{12}\{(-1)^{1+2}|M_{12}|\} \\ &\quad + \cdots + a_{1s}\{(-1)^{1+s}|M_{1s}|\} + \cdots + a_{1n}\{(-1)^{1+n}|M_{1n}|\} \qquad (3.15) \\ &= a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{12} + \cdots + a_{1n}\alpha_{1n} \end{aligned}$$

وحيث أن $(-1)^{s+1} = (-1)^{s-1}$ نجد (3.9) بجعل $i = 1$. سنسمى (3.15) مفكوك $|A|$ على طول الصف الأول منه .

إن مفكوك $|A|$ ، على طول الصف ذى الرقم r (هو (3.9) بوضع $i = r$) ، يمكن الحصول عليه بإعادة البرهان السابق . لتكن B المصفوفة التى نحصل عليها من A بنقل الصف ذى الرقم r فوق ال $(r-1)$ صفا الأول ونقل عمودها ذى الرقم s فوق $(s-1)$ الأعمدة الأول . فيكون :

$$|B| = (-1)^{r-1}\cdot(-1)^{s-1}|A| = (-1)^{r+s}|A|$$

إن عنصر الصف الأول والعمود الأول من B هو a_{rs} وإن مصغر a_{rs} من B هو بالضبط مصغر a_{rs} من A وينتج عن هذا أن حدود :

$$a_{rs}\{(-1)^{r+s}|M_{rs}|\}$$

هى كل حدود $|A|$ التى تحوى a_{rs} كعامل أى :

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{rk}\{(-1)^{r+k}|M_{rk}|\} = \sum_{k=1}^{n} a_{rk}\alpha_{rk}$$

ونجد (3.9) للقيمة $i = r$

١٠ - إذا كان α_{ij} المعامل المرافق للعنصر a_{ij} فى المصفوفة المربعة $A = [a_{ij}]$ من الدرجة n فبرهن أن :

$$k_1\alpha_{1j} + k_2\alpha_{2j} + \cdots + k_n\alpha_{nj} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-1} & k_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-1} & k_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & & & & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j-1} & k_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \text{(i)}$$

تنتج هذه العلاقة عن (3.10) بعد أن نستعيض عن a_{1j} بـ k_1 وعن a_{2j} بـ k_2 ، . . . . . ، a_{nj} بـ k_n بإجراء هذه التعديلات لا يتغير أى واحد من المعاملات المرافقة $\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{nj}$ لأنه لا يحوى أى واحد منها أى عنصر من العمود ذى الرقم j من A .

نجد استنادا إلى النظرية VII أن المحددة الواردة فى (i) تساوى الصفر عندما يكون $k_r = a_{rs}$ حيث $(s \neq j$ و $r = 1,2,\ldots,n)$ واستنادا إلى النظريتين VIII و VII فإن المحددة الواردة فى (i) هى $|A|$ عندما يكون $k_r = a_{rj} + ka_{rs}$ حيث $(r = 1,2,\ldots,n$ و $s \neq j)$.

اكتب العلاقة المشابهة لـ (i) التى تنتج عن (3.9) عندما نستعيض فيها عن عناصر الصف ذى الرقم i من A بـ $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

١١ – احسب (ا) – $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix}$ جـ – $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & -4 \end{vmatrix}$ هـ – $|A| = \begin{vmatrix} 28 & 25 & 38 \\ 42 & 38 & 65 \\ 56 & 47 & 83 \end{vmatrix}$

(ب) – $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -2 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ د – $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & -6 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

(ا) بالفك على طول العمود الثانى (أنظر النظرية X) :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = a_{12}\alpha_{12} + a_{22}\alpha_{22} + a_{32}\alpha_{32} = 0\cdot\alpha_{12} + 0\cdot\alpha_{22} + (-5)\alpha_{32}$$

$$= -5(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5(4-6) = -10$$

(ب) اطرح مرتين العمود الثانى من العمود الثالث (انظر النظرية IX) :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -2 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 8-2\cdot4 \\ -2 & 1 & 5-2\cdot1 \\ -3 & 2 & 4-2\cdot2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -3(14) = -42$$

(جـ) اطرح ثلاث مرات الصف الثانى من الصف الأول واجمع مرتين الصف الثانى إلى الثالث :

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-3(1) & 4-3(2) & 5-3(3) \\ 1 & 2 & 3 \\ -2+2(1) & 5+2(2) & -4+2(3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 9 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -(-4+36) = -32$$

(د) اطرح العمود الأول من العمود الثانى ثم قم بما قمت به فى (جـ)

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & -6 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 5 & -11 & 3 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-2(1) & 1 & -4+4(1) \\ 5-2(-11) & -11 & 3+4(-11) \\ 4-2(-2) & -2 & -3+4(-2) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 27 & -11 & -41 \\ 8 & -2 & -11 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 27 & -41 \\ 8 & -11 \end{vmatrix} = -31$$

(هـ) ضع العدد 14 كعامل مشترك بين عناصر العمود الأول ، خارج المحددة واستعمل النظرية IX لإختزال عناصر بقية الأعمدة فنجـد :

$$|A| = \begin{vmatrix} 28 & 25 & 38 \\ 42 & 38 & 65 \\ 56 & 47 & 83 \end{vmatrix} = 14\begin{vmatrix} 2 & 25 & 38 \\ 3 & 38 & 65 \\ 4 & 47 & 83 \end{vmatrix} = 14\begin{vmatrix} 2 & 25-12(2) & 38-20(2) \\ 3 & 38-12(3) & 65-20(3) \\ 4 & 47-12(4) & 83-20(4) \end{vmatrix}$$

$$= 14\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 14\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 9 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -14\begin{vmatrix} -1 & 9 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -14(-1-54) = 770$$

١٢ – بين أن p و q المعرفين بالعلاقتين (3.13) و (3.14) إما أن يكونا زوجين معاً أو فردين معاً .

بما أن دليل كل صف (عمود) واقع إما فى p وإما فى q ولا يمكن أن يقع فيهما معا فإن :

$$p+q = (1+2+\cdots+n) + (1+2+\cdots+n) = 2\cdot\tfrac{1}{2}n(n+1) = n(n+1)$$

أى أن $q+p$ زوجى (لأنه إما أن يكون n أو $1+n$ زوجيا) وهذا يعنى أنه إما أن يكون q و p زوجين معا أو أن يكونا فرديين معا وأن $(-1)^p = (-1)^q$ وأنه يكفى حساب واحد منهما فقط .

١٣ – فى المصفوفة ، $A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{bmatrix}$ إن المتمم الجبرى لـ $-|A^{2,4}_{2,3}|$ هو :

$$(-1)^{2+3+2+4}|A^{1,3,5}_{1,4,5}| = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 16 & 18 & 20 \\ 21 & 23 & 25 \end{vmatrix}$$

أنظر المسألة ١٢

وإن المتمم الجبرى لـ $|A^{1,3,5}_{1,4,5}|$ هو $|A^{2,4}_{2,3}| = -\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 12 & 14 \end{vmatrix}$.

مسائل اضافية

١٤ – برهن أن التبديل 12534 للأعداد الطبيعية 1, 2, 3, 4, 5 زوجى ، 24135 فردى ، 41532 زوجى ، 53142 فردى و 52314 زوجى .

١٥ – اكتب مجموعة تباديل الأعداد 1, 2, 3, 4 كاملة وبرهن أن نصفها زوجى والنصف الآخر فردى .

١٦ – لنفرض أن a, b, c, d, e هى عناصر قطر مصفوفة مربعة من الدرجة الخامسة A . برهن ، بالاستفادة من (3.6) أنه إذا كانت A قطرية ، مثلثة عليا أو مثلثة دنيا ، فإنه يكون : $|A| = a\,b\,c\,d\,e$.

١٧ – إذا كان $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ برهن أن $AB \neq BA \neq A'B \neq AB' \neq A'B' \neq B'A'$ ولكن محددة كل واحدة من حواصل الضرب هذه يساوى 4 .

١٨ – برهن كما فى المسألة (١) :

أ – $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 27$ ب – $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 4$ جـ – $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 0$

١٩ – (أ) برهن أن (2) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 11 \end{vmatrix} = -4.$

(ب) لنرمز بالرمز $|B|$ المحددة التى تنتج عن $|A|$ بضرب عناصر عموده الثانى فى 5 احسب $|B|$ لتحقيق النظرية III

(جـ) لنرمز بـ $|C|$ المحددة التى تنتج عن $|A|$ بالمبادلة بين عموده الأول والثالث ، احسب $|C|$ لتحقيق النظرية V

(د) برهن أن $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 8 \end{vmatrix} = |A|$ وهذا ما يحقق النظرية VIII

(هـ) نحصل على المحددة $|D| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix}$ من المحددة $|A|$ بطرح عناصر العمود الأول ثلاث مرات من العناصر المقابلة لها من العمود الثالث . احسب $|D|$ لتحقق النظرية IX .

(و) اطرح ، فى المحددة $|A|$ مرتين الصف الأول من الصف الثانى واطرح أربع مرات الصف الأول من الصف الثالث ثم احسب المحددة الناتجة .

(ز) فى $|A|$ اضرب العمود الأول فى 3 واطرح من الناتج العمود الثالث ثم برهن أن قيمة المحددة الناتجة تساوى ثلاثة أضعاف $|A|$ قارن مع (هـ) لا تخلط بين (هـ) و (ز) .

٢٠ – إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n وكان k مقدارا عدديا فاستخدم (3.6) لتبرهن أن $|kA| = k^n|A|$.

٢١ – برهن أنه (أ) إذا كان $|A| = k$ فإنه يكون $|\bar{A}| = \bar{k} = |\bar{A}'|$.

(ب) إذا كانت A مصفوفة هيرميتية تخالفية فإن $|A|$ إما أن تكون عددا حقيقيا أو عدداً تخيليا بحتا .

٢٢ – (أ) عد عدد المرات التى بادلنا فيها بين صفين (عمودين) متتاليين لنحصل على B من A فى النظرية V وبذا تبرهن هذه النظرية .

(ب) قم بالأمر ذاته بالنسبة للنظرية VI .

٢٣ – برهن النظرية VII إرشاد . بادل بين الصفين المتطابقين واستفد من النظرية V .

٢٤ – برهن أنه إذا كانت عناصر أى صفين (عمودين) فى مصفوفة مربعة A متناسبة فإن $|A| = O$.

٢٥ – استخدم النظريات VIII و III و VII لكى تبرهن النظرية IX .

٢٦ – احسب المحددات الواردة فى المسألة ١٨ مثل المحددات الواردة فى المسألة ١١ .

٢٧ – استخدم (3.6) لحساب $|A| = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{vmatrix}$ وبرهن بعد ذلك أن $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix}$ واستنتج أنه إذا كان $A = diag(A_1, A_2)$ حيث A_1 و A_2 مصفوفتان مربعتان من الدرجة الثانية ، فإن $|A| = |A_1| \cdot |A_2|$.

٢٨ – برهن أن المعامل المرافق لكل عنصر من $\begin{bmatrix} -1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$ هو هذا العنصر ذاته .

٢٩ – برهن أن المعامل المرافق لعنصر من أى صف من $\begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ هو العنصر المناظر من العمود الذى يحمل رقم الصف ذاته .

٣٠ – برهن (أ) إذا كانت A متماثلة فإن $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ عندما يكون $i \neq j$.

(ب) إذا كانت A مصفوفة مربعة درجتها n متماثلة تخالفية فإن $\alpha_{ij} = (-1)^{n-1}\alpha_{ji}$ عندما يكون $i \neq j$.

٣١ – المصفوفة A الواردة فى المسألة ٨ :

(أ) برهن أن $|A| = 1$.

(ب) كون المصفوفة $C = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$ وبرهن أن $AC = I$.

(حـ) وضح لماذا تكون نتيجة (ب) معروفة عندما تعرف نتيجة (أ)

٣٢ – اضرب أعمدة $\begin{vmatrix} bc & a^2 & a^2 \\ b^2 & ca & b^2 \\ c^2 & c^2 & ab \end{vmatrix} = |A|$ على الترتيب بالأعداد a, b, c احذف العامل المشترك في كل صف من الصفوف

وبرهن أن : $|A| = \begin{vmatrix} bc & ab & ca \\ ab & ca & bc \\ ca & bc & ab \end{vmatrix}$

٣٣ – برهن ، دون حساب قيمة المحددة أن

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 & bcd \\ b^2 & b & 1 & acd \\ c^2 & c & 1 & abd \\ d^2 & d & 1 & abc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^3 & a^2 & a & 1 \\ b^3 & b^2 & b & 1 \\ c^3 & c^2 & c & 1 \\ d^3 & d^2 & d & 1 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d).$$

٣٤ – برهن : أن المحددة المربعة من الدرجة n

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (n-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1).$$

٣٥ – برهن

$$\begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2} & \dots & a_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2} & \dots & a_n & 1 \end{vmatrix} = \{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots(a_1-a_n)\}\{(a_2-a_3)(a_2-a_4)\dots(a_2-a_n)\}\dots\{a_{n-1}-a_n\}$$

٣٦ – برهن بدون فك أن :

$$\begin{vmatrix} na_1+b_1 & na_2+b_2 & na_3+b_3 \\ nb_1+c_1 & nb_2+c_2 & nb_3+c_3 \\ nc_1+a_1 & nc_2+a_2 & nc_3+a_3 \end{vmatrix} = (n+1)(n^2-n+1)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

٣٧ – برهن ، بدون فك أن المعادلة $\begin{vmatrix} 0 & x-a & x-b \\ x+a & 0 & x-c \\ x+b & x+c & 0 \end{vmatrix} = 0$ ، جذراً يساوى الصفر .

٣٨ – برهن .

$$\begin{vmatrix} a+b & a & a & \cdots & a \\ a & a+b & a & \cdots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \cdots & a+b \end{vmatrix} = b^{n-1}(na+b).$$

الفصل الرابع

حسابات المحددات

إن طرق حساب المحددات من الدرجة الثانية والثالثة مرت فى الفصل الثالث . فى المسألة رقم ١١ فى الفصل الثالث استخدمت النظرية IX لتوضيح كيفية : (ا) الحصول على العنصر 1 أو 1 – كأحد عناصر المحددة إذا لم تكن المحددة تشمل مثل هذا العنصر .
(ب) جعل عنصر من عناصر المحددة مساوياً الصفر .

فى حالة المحددات ذات الدرجات الأعلى ، تقوم الطريقة العامة لحساب محددة ما على تكرار تطبيق النظرية IX من الفصل 3 بإحلال بدلا من المحددة المعطاة $|A|$ محددة أخرى $|b_{ij}| = |B|$ تتصف بكون كل عناصر صف (عمود) منها أصفاراً عدا واحد منها . فإذا كان b_{pq} هو العنصر غير المتلاشى وكان B_{pq} هو معاملة المرافق فإن :

$$|A| \;=\; |B| \;=\; b_{pq}\cdot\beta_{pq} \;=\; (-1)^{p+q}b_{pq}\,.$$

وبعد ذلك يعامل مصغر b_{pq} minor b_{pq} المعاملة ذاتها التى تعرضت لها المحددة الأصلية ونكرر هذه العملية حتى نصل إلى محددة من الدرجة الثانية أو الثالثة .

مثال ١ :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+2(3) & 3+2(-2) & -2+2(1) & 4+2(2) \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3-3(3) & 2-3(-2) & 3-3(1) & 4-3(2) \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -1 & 0 & 8 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ -6 & 8 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 8 & -1 & 8 \\ -6 & 8 & -2 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 8+8(-1) & -1 & 8+8(-1) \\ -6+8(8) & 8 & -2+8(8) \\ -2+8(4) & 4 & 5+8(4) \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 58 & 8 & 62 \\ 30 & 4 & 37 \end{vmatrix}$$

$$= -(-1)^{1+2}(-1)\begin{vmatrix} 58 & 62 \\ 30 & 37 \end{vmatrix} = -286$$

أنظر المسائل ١ — ٣

فى حالة المحددات التى تحوى عناصر مشابهة للعناصر الواردة فى محددة المثال ٢ – التالى فإنه يمكن استعمال الطريقة التالية : نقسم الصف الأول على واحد من عناصره غير الصفرية ثم نحاول الحصول على عناصر صفرية فى صف أو عمود من المحددة المفروضة .

مثال ٢ :

$$\begin{vmatrix} 0.921 & 0.185 & 0.476 & 0.614 \\ 0.782 & 0.157 & 0.527 & 0.138 \\ 0.872 & 0.484 & 0.637 & 0.799 \\ 0.312 & 0.555 & 0.841 & 0.448 \end{vmatrix} = 0.921\begin{vmatrix} 1 & 0.201 & 0.517 & 0.667 \\ 0.782 & 0.157 & 0.527 & 0.138 \\ 0.872 & 0.484 & 0.637 & 0.799 \\ 0.312 & 0.555 & 0.841 & 0.448 \end{vmatrix} = 0.921\begin{vmatrix} 1 & 0.201 & 0.517 & 0.667 \\ 0 & 0 & 0.123 & -0.384 \\ 0 & 0.309 & 0.196 & 0.217 \\ 0 & 0.492 & 0.680 & 0.240 \end{vmatrix}$$

$$= 0.921\begin{vmatrix} 0 & 0.123 & -0.384 \\ 0.309 & 0.196 & 0.217 \\ 0.492 & 0.680 & 0.240 \end{vmatrix} = 0.921(-0.384)\begin{vmatrix} 0 & -0.320 & 1 \\ 0.309 & 0.196 & 0.217 \\ 0.492 & 0.680 & 0.240 \end{vmatrix}$$

$$= 0.921(-0.384)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.309 & 0.265 & 0.217 \\ 0.492 & 0.757 & 0.240 \end{vmatrix} = 0.921(-0.384)\begin{vmatrix} 0.309 & 0.265 \\ 0.492 & 0.757 \end{vmatrix}$$

$$= 0.921(-0.384)(0.104) = -0.037$$

مفكوك لابلاس :

إن مفكوك محددة $|A|$ من الدرجة n على طول صف (عمود) منه هو حالة خاصة من طريقة لابلاس لفك المحددات ، فبدلا من أن نختار صفاً معينا من $|A|$ لنختار m صفا مرقماً بـ $i_1, i_2, \ldots, i_m$ المرتبة بحسب كبرها . من هذه الصفوف والتي عددها m يمكننا أن نحصل على

$$\rho = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2 \ldots m}$$ صغيرا من الشكل $\left|A_{i_1, i_2, \ldots, i_m}^{j_1, j_2, \ldots, j_m}\right|$

بأخذ كل الاختيارات الممكنة لـ m عموداً من أصل n عموداً ، وإذا استعملنا كل المصغرات ومتمماتها الجبرية فإننا نحصل على مفكوك لابلاس

$$|A| = \sum_{\rho} (-1)^s \left|A_{i_1, i_2, \ldots, i_m}^{j_1, j_2, \ldots, j_m}\right| \cdot \left|A_{i_{m+1}, i_{m+2}, \ldots, i_n}^{j_{m+1}, j_{m+2}, \ldots, j_n}\right| \qquad (1.4)$$

حيث $s = i_1 + i_2 + \cdots + i_m + j_1 + j_2 + \cdots + j_m$, حيث يمتد التجميع على كل الاختيارات ، التي عددها ρ ، لأدلة الأعمدة التي نأخذ منها m دليلا في كل اختيار .

مثال ٣ :

احسب $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ مستخدماً مصغرات الصفين الأولين .

نستنتج من (1.4)

$$|A| = (-1)^{1+2+1+2}\left|A_{1,2}^{1,2}\right|\cdot\left|A_{3,4}^{3,4}\right| + (-1)^{1+2+1+3}\left|A_{1,2}^{1,3}\right|\cdot\left|A_{3,4}^{2,4}\right|$$
$$+ (-1)^{1+2+1+4}\left|A_{1,2}^{1,4}\right|\cdot\left|A_{3,4}^{2,3}\right| + (-1)^{1+2+2+3}\left|A_{1,2}^{2,3}\right|\cdot\left|A_{3,4}^{1,4}\right|$$
$$+ (-1)^{1+2+2+4}\left|A_{1,2}^{2,4}\right|\cdot\left|A_{3,4}^{1,3}\right| + (-1)^{1+2+3+4}\left|A_{1,2}^{3,4}\right|\cdot\left|A_{3,4}^{1,2}\right|$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (-13)(15) - (8)(-6) + (-8)(-12) + (-1)(23) - (14)(6) + (-8)(16)$$
$$= -286$$

أنظر المسائل ٤ - ٦

محددة حاصل ضرب مصفوفتين : إذا كانت A و B مصفوفتين مربعتين من الدرجة n فإن

$$|AB| = |A|\cdot|B| \qquad (2.4)$$

أنظر المسألة ٧

فك محددة على طول صفها الأول وعمودها الأول : إذا كان $A = [a_{ij}]$ مصفوفة مربعة من الدرجة n فإن

$$|A| = a_{11}\alpha_{11} - \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} a_{i1}a_{1j}\alpha_{1j}^{i1} \qquad (3.4)$$

حيث a_{11} المعامل المرافق للعنصر a_{11} و α_{1j}^{i1} المتمم الجبرى المصغر $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix}$ من A .

مشتقة محددة : لنفرض أن المصفوفة المربعة $A = [a_{ij}]$ لها عناصر دوال فى المتغير x قابلة للتفاضل فيكون :

I إن المشتقة $\frac{d}{dx}|A|$ المحددة $|A|$ بالنسبة للمتغير x يساوى مجموع n محددة تنتج من المحددة $|A|$ بأن نستعيض ، على التوالى ، عن عناصر صف (عمود) منه بمشتقات هذه العناصر بالنسبة للمتغير x .

مثال ٤ :

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} x^2 & x+1 & 3 \\ 1 & 2x-1 & x^3 \\ 0 & x & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 1 & 2x-1 & x^3 \\ 0 & x & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^2 & x+1 & 3 \\ 0 & 2 & 3x^2 \\ 0 & x & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^2 & x+1 & 3 \\ 1 & 2x-1 & x^3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 5 + 4x - 12x^2 - 6x^5$$

أنظــر المسألة ٨

مسائل محلولة

١ -

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 7 & 4 & -3 & 10 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 7-2(2) & 4-2(3) & -3-2(-2) & 10-2(4) \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -286$$

(أنظر المثال ١)

يوجد طبعاً ، طرق كثيرة أخرى للحصول على العنصر 1 + أو 1 — فيمكننا مثلا أن نطرح العمود الأول من الثانى ، العمود الرابع من الثانى ، الصف الأول من الثانى ، وهكذا . . . .

٢ -

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1+1 & 2-2(1) \\ 2 & 3 & 2+2 & -2-2(2) \\ 2 & 4 & 2+2 & 1-2(2) \\ 3 & 1 & 5+3 & -3-2(3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & -6 \\ 2 & 4 & 4 & -3 \\ 3 & 1 & 8 & -9 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 4 & 4 & -3 \\ 1 & 8 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-2(4) & 4-2(4) & -6-2(-3) \\ 4 & 4 & -3 \\ 1-3(4) & 8-3(4) & -9-3(-3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -4 & 0 \\ 4 & 4 & -3 \\ -11 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} -5 & -4 \\ -11 & -4 \end{vmatrix} = -72$$

٣ - احسب
$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 1-i & 0 & 2-3i \\ 1-2i & 2+3i & 0 \end{vmatrix}.$$

لنضرب الصف الثانى $1 + i$ والصف الثالث $1 + 2i$ فنجد :

$$(1+i)(1+2i)|A| = (-1+3i)|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 2 & 0 & 5-i \\ 5 & -4+7i & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 2 & 0 & 5-i \\ 1 & -4+7i & -10+2i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 0 & 8-14i & 25-5i \\ 1 & -4+7i & -10+2i \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+i & 1+2i \\ 8-14i & 25-5i \end{vmatrix} = -6 + 18i$$

ويكون $|A| = 6$

٤ - استنتج مفكوك لابلاس للمحددة $|a_{ij}| = |A|$ المربعة من الدرجة n باستعمال مصغرات من درجة $m<n$

اعتبر المصغر $\left|A^{j_1,j_2,\dots,j_m}_{i_1,i_2,\dots,i_m}\right|$ من الدرجة m للمحددة $|A|$ حيث رتبت أرقام الصفوف والأعمدة بحسب كبرها.

الآن وبإجراء $i_1 - 1$ من المبادلات بين صفين متتالين من صفوف $|A|$ فإن الصف ذا الرقم i_1 يمكن أن يحتل الصف الأول وبعد i_2-2 من المبادلات بين صفين متتاليين يمكننا أن نجعل الصف ذا الرقم i_2 فى موضع الصف الثانى . . . . ثم بعد $i_m - m$ من المبادلات بين صفين متتاليين يقع الصف ذو الرقم i_m فى موضع الصف ذى الرقم m , أى بعد $(i_1-1)+(i_2-2)+\cdots+(i_m-m) = i_1+i_2+\cdots+i_m-\frac{1}{2}m(m+1)$ من المبادلات بين صفين متتاليين تحتل الصفوف ذوات الأرقام $j_1, j_2, \dots, j_m$ مواضع الصفوف الـm الأول . وبالشكل ذاته نتوصل بعد $j_1+j_2+\cdots+j_m-\frac{1}{2}m(m+1)$ مبادلة بين عمودين متتاليين إلى أن تقع الأعمدة . ذات الأرقام $i_1, i_2, \dots, i_m$, فى مواضع الأعمدة الـ m الأول وهكذا ونتيجة للمبادلات المبينة أعلاه بين الصفوف المتتالية والأعمدة المتتالية فإن المصغر المختار يحتل الركن الأعلى الأيسر ويحتل متممه الجبرى الركن الأسفل الأيمن من المحدد المفروض . علاوة على ذلك تكون المحددة $|A|$ قد غيرت إشارتها $\sigma = i_1+i_2+\cdots+i_m+j_1+j_2+\cdots+j_m-m(m+1)$ مرة وهذا يعادل $s = i_1+i_2+\cdots+i_m+j_1+j_2+\cdots+j_m$ تغيير في الإشارة هـذا .

$\left|A^{j_1,j_2,\dots,j_m}_{i_1,i_2,\dots,i_m}\right| \cdot \left|A^{j_{m+1},j_{m+2},\dots,j_n}_{i_{m+1},i_{m+2},\dots,i_n}\right|$ يعطى $m!(n-m)!$ حدا من $(-1)^s|A|$ أو

(a) $(-1)^s\left|A^{j_1,j_2,\dots,j_m}_{i_1,i_2,\dots,i_m}\right| \cdot \left|A^{j_{m+1},j_{m+2},\dots,j_n}_{i_{m+1},i_{m+2},\dots,i_n}\right|$ يعطى $m!(n-m)!$ حدا من $|A|$

لنفرض أن الأعداد $i_1, i_2, \dots, i_m$ قد ثبتت ويمكننا أن نختار من هذه الصفوف $\rho = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1\cdot 2\dots m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

من المصغرات المربعة ذوات الدرجة m المختلفة . يعطى كل واحدة من هذه المصغرات بعد أن يضرب بمتممه الجبرى $m!(n-m)!$ حدا من حدود المحددة $|A|$ ونظرا لطريقة تكوينهم فإنه لا يوجد تكرار لحدود المحددة $|A|$ بين حواصل الضرب هذه لذلك

$$|A| = \sum_{\rho}(-1)^s\left|A^{j_1,j_2,\dots,j_m}_{i_1,i_2,\dots,i_m}\right| \cdot \left|A^{j_{m+1},j_{m+2},\dots,j_n}_{i_{m+1},i_{m+2},\dots,i_n}\right|$$

حيث $s = i_1+i_2+\cdots+i_m+j_1+j_2+\cdots+j_m$ وحيث يمتد التجميع على الاختيارات المختلفة لأدلة الأعمدة $j_1, j_2, \dots, j_m$ التي عددها ρ .

٥ - احسب $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ مستعملا مصغرات العمودين الأولين .

$$\begin{aligned} |A| &= (-1)^{1+2+1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4+1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4+1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-3)(1) + (-2)(1) - (5)(-1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

٦ - إذا كانت C, B, A ثلاث مصفوفات مربعة من الدرجة n فاثبت أن :

$$|P| = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$$

من الـ n صفا الأول من $|P|$ ، يمكن تكوين مصغر واحد $|A|$ مربع غير صفرى من الدرجة n ويكون متممه الجبرى هو $|B|$. وينتج عن هذا باستخدام مفكوك لابلاس ، $|P| = |A| . |B|$

٧ – أثبت أن : $|AB| = |A| \cdot |B|$

لنفرض أن $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ مصفوفتان مربعتان من الدرجة n ولتكن $C = [c_{ij}] = AB$ بحيث يكون $c_{ij} = \sum_1^n a_{ik} b_{kj}$ من المسألة ٦ .

$$|P| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$$

لنضف إلى العمود ذى الرقم $(n + 1)$ من $|P|$ العمود الأول مضروبا فى b_{11} العمود الثانى مضروبا فى b_{21} ، . . . . ، العمود ذا الرقم n مضروبا فى b_{n1} فنجد :

$$|P| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

ثم نضف إلى العمود ذى الرقم $(n + 2)$ من $|P|$ العمود الأول مضروبا فى b_{12} والعمود الثانى مضروبا فى b_{22} ، . . . . . ، والعمود ذا الرقم n مضروبا فى b_{n2} فنجد :

$$|P| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & c_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_{21} & c_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

بالاستمرار فى هذه العملية نجد فى النهاية $|P| = \begin{vmatrix} A & C \\ -I_n & 0 \end{vmatrix}$ من الصفوف الـ n الأخيرة من $|P|$ يمكن تكوين مصغر مربع واحد فقط غير متلاش من الدرجة n من الشكل $|-I_n| = (-1)^n$ متممه الجبرى $(-1)^{1+2+\cdots+n+(n+1)+\cdots+2n}|C| = (-1)^{n(2n+1)}|C|$ ومنه $|P| = (-1)^n(-1)^{n(2n+1)}|C| = |C|$

و $|C| = |AB| = |A| \cdot |B|$.

٨ – لنفرض أن $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ حيث $a_{ij} = a_{ij}(x), \ (i, j = 1, 2, 3),$ دوال قابلة للتفاضل بالنسبة للمتغير x فيكون :

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

وإذا رمزنا لـ $\frac{d}{dx}(a_{ij})$ بالرمز a'_{ij} فإننا نجـد :

$$\frac{d}{dx}|A| = a'_{11}a_{22}a_{33} + a'_{22}a_{11}a_{33} + a'_{33}a_{11}a_{22} + a'_{12}a_{23}a_{31} + a'_{23}a_{12}a_{31} + a'_{31}a_{12}a_{23}$$
$$+ a'_{13}a_{32}a_{21} + a'_{32}a_{13}a_{21} + a'_{21}a_{13}a_{32} - a'_{11}a_{23}a_{32} - a'_{23}a_{11}a_{32} - a'_{32}a_{11}a_{23}$$
$$- a'_{12}a_{21}a_{33} - a'_{21}a_{12}a_{33} - a'_{33}a_{12}a_{21} - a'_{13}a_{22}a_{31} - a'_{22}a_{13}a_{31} - a'_{31}a_{13}a_{22}$$

$$= a'_{11}\alpha_{11} + a'_{12}\alpha_{12} + a'_{13}\alpha_{13} + a'_{21}\alpha_{21} + a'_{22}\alpha_{22} + a'_{23}\alpha_{23} + a'_{31}\alpha_{31} + a'_{32}\alpha_{32} + a'_{33}\alpha_{33}$$

$$= \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix}$$

انظر المسألة ١٠ من الفصل ٣

مسـائل اضـافية

٩ – احسب ما يلي : ا – $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 156$ جـ – $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & -4 & -5 \\ 3 & -4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -304$

ب – $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 41$ د – $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 & -2 & -5 \\ 3 & -2 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 118$

١٠ – إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n فبرهن أن $|A'A|$ عدد حقيقي غير سالب .

١١ – احسب المحددة الواردة فى المسألة رقم ٩ (ا) مستخدما مصغرات من الصفين الأولين ثم باستعمال مصغرات العمودين الأولين .

١٢ – (ا) ليكن $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{bmatrix}$ ؛ $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_2 & b_1 \end{bmatrix}$

استخدم العلاقة $|AB| = |A|\cdot|B|$ لتبرهن صحة العلاقة $(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2) = (a_1b_1 - a_2b_2)^2 + (a_2b_1 + a_1b_2)^2$.

(ب) ليكن $A = \begin{bmatrix} a_1+ia_3 & a_2+ia_4 \\ -a_2+ia_4 & a_1-ia_3 \end{bmatrix}$. $B = \begin{bmatrix} b_1+ib_3 & b_2+ib_4 \\ -b_2+ib_4 & b_1-ib_3 \end{bmatrix}$

استفد من العلاقة $|B|\ .\ |A| = |AB|$ لتعبر عن $(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2)$ بمجموع أربعة مربعات .

١٣ – احسب
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$
مستعملا مصغرات من الصفوف الثلاثة الأولى .

الجواب -720

١٤ – احسب
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$
مستعملا مصغرات من الصفين الأولين .

الجواب 2

١٥ – إذا كان $A_1, A_2, \ldots, A_S$ مصفوفات مربعة استعمل طريقة لابلاس فى فك المحددات لإثبات .

$$|\operatorname{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_S)| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_S|$$

١٦ – فك
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}$$
مستخدما مصغرات من الصفين الأولين لإثبات أن :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ b_2 & b_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

١٧ – استعمل طريقة لابلاس فى فك المحددات وبرهن أن المحددة $\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & C \end{vmatrix}$. ذات الدرجة n حيث 0 مصفوفة مربعة من الدرجة k تساوى الصفر عندما يكون $k > \frac{1}{2} n$.

١٨ – فك كل من المعاملات المرافقة $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}$ فى $|A| = a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{12} + a_{13}\alpha_{13} + a_{14}\alpha_{14}$ على طول العمود الأول لكل منها لتبيان

$$|A| = a_{11}\alpha_{11} - \sum_{i=2}^{4} \sum_{j=2}^{4} a_{i1} a_{1j} \alpha_{1j}^{i1}$$

حيث α_{1j}^{i1} هو المتمم الجبرى للمصغر $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix}$ من $|A|$

١٩ – إذا رمزنا بالرمز α_{ij} للمعامل المرافق للعنصر a_{ij} فى المصفوفة المربعة $A = [a_{ij}]$ ذات الدرجة n فبرهن أن :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & p_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & p_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & p_n \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ p_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j \alpha_{ij}$$

إرشاد: استخدم (3.4)

٢٠ – احسب مشتقة كل من المحددات التالية :

(أ) $\begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x+1 \end{vmatrix}$ ب – $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x^2 & 2x+1 & x^3 \\ 0 & 3x-2 & x^2+1 \end{vmatrix}$ جـ – $\begin{vmatrix} x^2-1 & x-1 & 1 \\ x^4 & x^3 & 2x+5 \\ x+1 & x^2 & x \end{vmatrix}$

الجواب أ – $2x+9x^2-8x^3$. ب – $1-6x+21x^2+12x^3-15x^4$

جـ – $6x^5-5x^4-28x^3+9x^2+20x-2$

٢١ – برهن أنه إذا كانت A و B مصفوفتين مربعتين حقيقيتين من الدرجة a حيث A مصفوفة غير شاذة وإذا كان $H=A+iB$ مصفوفة هيرميتية ، فإن :

$$|H|^2 = |A|^2 \cdot |I+(A^{-1}B)^2|$$

الفصل الخامس

التكافـــؤ

رتبـــة مصـــفوفة :

نقول عن مصفوفة A غير صفرية إنها ذات رتبة r إذا كان على الأقل أحد مصغراتها المربعة من الدرجة r غير متلاشية وكان كل مصغر من الدرجة $(r+1)$ لهذه المصفوفة، يساوي الصفر . إن رتبة المصفوفة الصفرية هي صفر .

مثال ١ : إن رتبة المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ هي $r = 2$ لأن $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ بينما $|A| = 0$

انظر المسألة ١

نقول عن مصفوفة مربعة A درجتها n ، إنها **غير شاذة** إذا كانت رتبتها $r = n$ أي إذا كان $|A| \neq 0$ أما في الحالة المعاكسة فإننا نسمي A **مصفوفة شاذة** . ان مصفوفة المثال رقم ١ هي مصفوفة شاذة .

من العلاقة $|AB| = |A| \cdot |B|$ ينتج :

I — أن حاصل ضرب اثنين أو أكثر من المصفوفات غير الشاذة وذات الدرجة n هو مصفوفة غير شاذة وأن حاصل ضرب اثنين أو أكثر من المصفوفات المربعة من درجة n هو مصفوفة شاذة فيما إذا كان على الأقل ، واحد من هذه المصفوفات شاذا .

التحويـــلات الأوليـــة :

إن العمليات التالية والمسماة تحويلات أولية ، لا تغير في درجة أو رتبة مصفوفة .

(١) المبادلة بين الصفين ذوي الرقمين i و j ويرمز لهذه العملية بالرمز H_{ij} المبادلة بين العمودين ذوي الرقمين i و j ويرمز لهذه العملية بالرمز K_{ij} .

(٢) ضرب كل عنصر من عناصر الصف ذي الرقم i بعدد k لايساوي الصفر ، ويرمز لهذه العملية بالرمز $H_i(k)$ ؛ ضرب كل عنصر من عناصر العمود ذي الرقم i بعدد k لا يساوي الصفر ، ويرمز لهذه العملية بالرمز $K_i(k)$

(٣) الإضافة إلى عناصر الصف ذي الرقم i العناصر المقابلة لها من الصف ذي الرقم j مضروبة بالمقدار العددي k ويرمز لهذه العملية بالرمز $H_{ij}(k)$ الإضافة إلى عناصر العمود ذي الرقم i العناصر المقابلة من العمود ذي الرقم j مضروبة بالمقدار العددي k ويرمز لهذه العملية بالرمز $K_{ij}(k)$.

إن التحويلات التي رمزنا لها بالرمز H تدعى **تحويلات صفوف أولية** وإن التحويلات التي رمزنا لها بالرمز K فإنها تدعى **تحويلات أعمدة أولية** .

إن من الواضح أن تحويلا أوليا لا يغير في درجة مصفوفة . ويبرهن في المسألة ٢ ، أنه لا يغير أيضا في رتبة هـــذه المصفوفـــة .

معكوس تحويل أولي :

إن معكوس تحويل أولي هو عملية تلاشي تأثير هذا التحويل الأولي أي إذا أخضعنا A لتحويل أولي ثم أخضعنا المصفوفة الناتجة للتحويل المعاكس لهذا التحويل ، فإن الناتج الأخير هو المصفوفة A نفسها .

مثال ٢ :

ليـــكن (١) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

إن تأثير التحويل الأولى للصفوف $H_{21}(-2)$ يؤدى إلى 3 . $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

أما تأثير التحويل الأولى للصفوف $H_{21}(+2)$ على B فإنه يؤدى إلى A مرة ثانية .

لهذا فإن التحويلين $H_{21}(-2)$ و $H_{21}(+2)$ هما تحويلان أوليان عكسيان الصفوف

إن التحويلات الأولية العكسية هى :

(١َ) $K_{ij}^{-1} = K_{ij}$ $\qquad$ $H_{ij}^{-1} = H_{ij}$

(٢َ) $K_i^{-1}(k) = K_i(1/k)$ $\qquad$ $H_i^{-1}(k) = H_i(1/k)$

(٣َ) $K_{ij}^{-1}(k) = K_{ij}(-k)$ $\qquad$ $H_{ij}^{-1}(k) = H_{ij}(-k)$

وعلى ذلك يتضح :

II أن عكس تحويل أولى هو تحويل أولى من نفس النوع .

المصـــفوفات المتكافئــة :

نقول عن مصفوفتين A و B إنهما متكافئتان $B \sim A$ إذا أمكن الحصول على إحداهما من الأخرى بإجراء تحويلات أولية متتابعة .

مثال ٣ :

إذا أجرينا التحويلات $H_{21}(-2), H_{31}(1), H_{32}(-1),$ فإننا نجـــد :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

حيث أن جميع مصغرات B ذات الدرجة 3 متلاشية بينما $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} \neq 0.$ إذن رتبة B تساوى 2 لذلك تكون رتبة A مساوية 2 أيضا . يمكن مقارنة طريقة الحصول على رتبة المصفوفة A وذلك بالحصول على مصفوفة مكافئة B يمكن معرفة رتبتها بمجرد النظر بطريقة حساب مختلف مصغرات A لتحديد رتبته .

انظر المسألة ٣

التكافؤ بالصفوف إذا حولت المصفوفة A إلى المصفوفة B باستعمال تحويلات أولية للصفوف فإننا نقول إن B مكافئة بالصفوف للمصفوفة A وبالعكس . إن المصفوفتين A و B الواردتين فى المثال ٣ متكافئتان بالصفوف .

إن أى مصفوفة غير صفرية A رتبتها r تكافئ بالصفوف مصفوفة قانونية C يكون فيها :

(١) واحد أو أكثر من عناصر كل صف من الصفوف الـ r الأولى غير صفرية بينما لا تحوى بقية الصفوف سوى عناصر صفرية .

(ب) إن المنصر الأول الغير صفرى فى الصف الذى رقمه i حيث $(i=1,2...r)$ يساوى 1؛ وليكن رقم العمود الذى يقع فيه هذا المنصر j_i .

(جـ) $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$.

(د) إن المنصر الوحيد الغير صفرى فى العمود ذى الرقم j_i حيث $(i=1, 2, \ldots, r)$، هو المنصر 1 من الصف ذى الرقم i .

لتحويل A إلى C نفرض أن j_1 هو رقم أول عمود غير صفرى من A .

(i_1) إذا كان $a_{ij_1} = 0$ فاستعمل $H_1(1/a_{1j_1})$ لجعل هذا المنصر 1 عندما يكون ذلك ضروريا .

(i_2) إذا كان $a_{ij_1} = 0$ لكن $a_{pj_1} \neq 0$, استعمل H_{1p} ثم افعل ما فعلت فى (i_1) .

(ii) استعمل تحويلات الصفوف من النوع (٣) بضرب الصف الأول بعدد مناسب لنحصل على أصفار فى المواقع الأخرى من العمود ذى الرقم j_1 .

إذا ظهرت عناصر غير صفرية فى الصف الأول فقط من المصفوفة الناتجة B ، فإنه يكون $B = C$ وإذا كان غير ذلك فلنفرض أن j_2 رقم أول عمود لا يقع فيه هذا الأمر . إذا كان $b_{2j_2} \neq 0$ فاستعمل $H_2(1/b_{2j_2})$ كما فى (i_1) وإذا كان $b_{2j_2} = 0$ بينما $b_{qj_2} \neq 0$ فاستعمل H_{2q} واتبع نفس ما تم فى (i_1) . ويكون عندئذ كما فى (ii) العمود ذو الرقم j_2 خاليا من أى عنصر آخر غير صفرى .

إذا ظهرت عناصر غير صفرية فى المصفوفة الناتجة فى الصفين الأولين فقط ، فإننا نحصل على المصفوفة C . أما إذا لم يتحقق ذلك فإننا نكرر العملية السابقة حتى نحصل على المصفوفة C .

مثال ٤ : إذا أجريت تحويلات الصفوف $H_{21}(-2), H_{31}(1); H_2(1/5); H_{12}(1), H_{32}(-5)$ بالتتابع على A من المثال ٣ فإننا نحصل على ما يلى :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 17/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= C$$

وهى مصفوفة لها الخواص (أ) - (د)

أنظر المسألة ٤

الشكل العادى لمصفوفة :

يمكن اختزال أى مصفوفة A رتبتها $r > 0$ بواسطة تحويلات أولية إلى إحدى الصور التالية :

$$I_r, \quad \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [I_r \quad 0], \quad \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

التى تسمى **الشكل العادى** (النظامى) للمصفوفة A . إن المصفوفة الصفرية هى الشكل العادى الخاص بها .

حيث أنه يمكن استخدام تحويلات الصفوف وتحويلات الأعمدة فى وقت واحد فإن المنصر 1 من الصف الأول الذى حصلنا عليه فى البند الوارد أعلاه ، يمكن وضعه فى العمود الأول . ومن الممكن عندها أن يكون كل من الصف الأول والعمود الأول خاليا من عناصر أخرى غير صفرية (متلاشية) . وبنفس الطريقة يمكن وضع المنصر 1 ، من الصف الثانى ، فى العمود الثانى وهكذا .....

فمثلا ، إن إجراء التحويلات المتتابعة $H_{21}(-2), H_{31}(1), K_{21}(-2), K_{31}(1), K_{41}(-4), K_{23}, K_2(1/5), H_{32}(-1), K_{42}(3)$ على A الواردة فى المثال ٣ يعطى $\begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$، وهو الشكل العادى .

أنظر المسألة ٥

المصـــفوفات الأوليـــة :

إن المصفوفة الناتجة عن تطبيق تحويل صفوف (تحويل أعمدة) على مصفوفة الوحدة I_n تدعى مصفوفة صفية (أعمدة) أولية . سنرمز للمصفوفة الأولية بنفس الرمز الذى استخدم للتعبير عن التحويلة الأولية التى استخدمت لحصول على المصفوفة .

مثال ٥ :

أمثلة من المصفوفات الأولية الناتجة عن $I_3 = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ هى :

$$H_{12} = \begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix} = K_{12}, \quad H_3(k) = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&k\end{bmatrix} = K_3(k), \quad H_{23}(k) = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&k\\0&0&1\end{bmatrix} = K_{32}(k)$$

كل مصفوفة أولية هى مصفوفة غير شاذة (لماذا ؟) .

يمكن الحصول على تأثير تحويل أولى على المصفوفة A ذات الدرجة $m \times n$ ، بضرب هذه المصفوفـة بمصفوفة أوليـــة .

لإجراء تحويل أولى معين على الصفوف على مصفوفة A من الدرجة $m \times n$ ، قم بهذا التحويل على I_m لإيجاد المصفوفة الأولية المناظرة H ثم اضرب A من اليسار بالمصفوفة H .

لإجراء تحويل أولى للأعمدة على A ، قم بهذا التحويل على I_n لحصول على المصفوفة الأولية المناظرة K ثم اضرب A من اليمين بالمصفوفة K .

مثال ٦ :

إذا كان $A = \begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}$ فإن العملية $H_{13} \cdot A = \begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7&8&9\\4&5&6\\1&2&3\end{bmatrix}$ تبادل بين الصفين الأول والثالث فى A : أما العملية $AK_{13}(2) = \begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7&2&3\\16&5&6\\25&8&9\end{bmatrix}$ فإنها تضيف إلى العمود الأول من A مضاعف العمود الثالث .

لتكن A و B مصفوفتين متكافئتين ، ولنرمز للمصفوفات الصفية والعمودية الأولية ، المناظرة للتحويلات الأولية للصفوف والأعمدة التى تحول المصفوفة A إلى B ، بالرموز $H_1, H_2, \ldots, H_s;\ K_1, K_2, \ldots, K_t$ حيث H_1 هو التحويل الأول للصفوف ، H_2 التحويل الثانى للصفوف ، . . . . K_1 التحويل الأول للأعمدة ، K_2 التحويل الثانى للأعمدة . . . . ويكون عندئذ :

$$H_s \ldots H_2 \cdot H_1 \cdot A \cdot K_1 \cdot K_2 \ldots K_t = PAQ = B \tag{5.2}$$

حيث (5.3) $P = H_s \ldots H_2 \cdot H_1$ و $Q = K_1 \cdot K_2 \ldots K_t$

ونجـد :

III تكون مصفوفتا A و B متكافئتين إذا كان (وإذا كان فقط) من الممكن إيجاد مصفوفتين غير شاذتين P و Q المعرفتين فى (5.3) بحيث يكون $P\ A\ Q = B$

مثال ٧ :

إذا كان $H_{31}(-1) \cdot H_{21}(-2) \cdot A \cdot K_{21}(-2) \cdot K_{31}(1) \cdot K_{41}(-2) \cdot K_{42}(1) \cdot K_3(\frac{1}{2})$ $A = \begin{bmatrix}1&2&-1&2\\2&5&-2&3\\1&2&1&2\end{bmatrix}$

فإن :

$$= \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot A\cdot\begin{bmatrix}1&-2&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0&-2\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\cdot A\cdot\begin{bmatrix}1&-2&\frac{1}{2}&-4\\0&1&0&1\\0&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} = PAQ = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix} = B$$

بما أن كل مصفوفة متكافئة لشكلها العادى فإنه يكون :

IV إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n وغير شاذة فإنه يوجد مصفوفتان غير شاذتين P و Q معرفتان فى (5.3) وتحققان العلاقة $P\ A\ Q = I_n$

أنظر المسألة ٦

معكوس حاصل ضرب المصفوفات الأوليـــة :

ليكن

$$Q = K_1 \cdot K_2 \ldots K_t \quad \cdot \quad P = H_s \ldots H_2 \cdot H_1$$

كما فى (5.3) . بما أن لكل من H و K معكوسا وبما أن معكوس حاصل الضرب هو حاصل ضرب المعكوسات بترتيب معاكس فإنه يكون :

$$Q^{-1} = K_t^{-1} \ldots K_2^{-1} \cdot K_1^{-1} \quad \text{،} \quad P^{-1} = H_1^{-1} \cdot H_2^{-1} \ldots H_s^{-1} \qquad (5.4)$$

لنفرض أن A مصفوفة مربعة غير شاذة من الدرجة n ولتكن P و Q المصفوفتين المعرفتين سابقا واللتين تحققان العلاقة $P\ A\ Q = I_n$ فيكون عندئذ :

$$A = P^{-1}(PAQ)Q^{-1} = P^{-1} \cdot I_n \cdot Q^{-1} = P^{-1} \cdot Q^{-1} \qquad (5.5)$$

ونكون بذلك قد برهنا :

V. يمكن التعبير عن كل مصفوفة غير شاذة كحاصل ضرب مصفوفات أولية .

أنظر المسألة ٧

وينتج مما سبق ما يلى :

VI. إذا كانت A مصفوفة غير شاذة فإن رتبة حاصل الضرب AB (حاصل الضرب BA أيضا) ، تكون مساوية لرتبة B.

VII. إذا كانت P و Q مصفوفتين غير شاذتين فإن رتبة $P\ A\ Q$ تكون مساوية إلى رتبة A .

المجموعة القانونيـــة المتكافئـــة :

نبرهن فى المسألة ٨ :

VIII. تكون المصفوفتان A و B من الدرجة $m \times n$ متكافئتين فيما إذا كان (وإذا كان فقط) لهما رتبةواحدة .

نسمى مجموعة المصفوفات من درجـــة $m \times n$ بأنها **مجموعة قانونية** تكافئية فيما إذا كانت كل مصفوفة من الدرجة $m \times n$ مكافئة لمصفوفة واحدة وواحده فقط من المجموعة . إن مثل هذه المجموعة القانونية تحدد بالعلاقة (5.1) حيث r تأخذ إما القيم $1, 2, \ldots, m$ وإما القيم $1, 2, \ldots, n$ حسبما تكون m أصغر من n أو بالعكس .

أنظر المسألة ٩

رتبــة حاصــل الضرب :

لتكن المصفوفة A من درجة $m \times p$ والرتبة r. يوجد ، استنادا إلى النظرية **III** ، مصفوفتان غير شاذتين P و Q تحققان العلاقة :

$$PAQ = N = \begin{bmatrix}I_r & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

أى $A = P^{-1} N Q^{-1}$. لتكن B مصفوفة من درجة $p \times n$ ولننظر فى رتبة :

$$AB = P^{-1}NQ^{-1}B \quad (5.6)$$

استنادا إلى النظرية VI تكون رتبة AB هى رتبة $NQ^{-1}B$. وعلى ذلك فإن صفوف $NQ^{-1}B$ تكون من الصفوف الـ r الأول من $Q^{-1}B$ و $m-r$ صفا مكونا من أصفار ، أى أن رتبة AB لا يمكنها أن تزيد عن r ، رتبة المصفوفة A .
وبالمثل فإن رتبة AB لا يمكنها أن تزيد عن رتبة B. ونكون بذلك قد برهنا :

IX. إن رتبة حاصل ضرب مصفوفتين لا يمكن أن تزيد عن رتبة أى من مضروبية .

لنفرض أن $AB = 0$ تنتج عن (5.6) إن $NQ^{-1}B=0$. إن هذا يتطلب أن تكون الصفوف الـ r الأول من $Q^{-1}B$ أصفارا بينما تكون بقية الصفوف اختيارية . أى أن رتبة $Q^{-1}B$ ورتبة B لا يمكن أن تزيد عن $(p-r)$ ونكون قد برهنا النظرية التالية :

X. إذا كانت رتبة مصفوفة A درجتها $m \times p$ مساوية r وإذا كانت B مصفوفة درجتها $p \times n$ وتحقق العلاقة $AB = 0$ فإن رتبة B لا تزيد عن $(p-r)$.

مســــائل محلولة

١ - (أ) إن رتبة $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ تساوى 2 لأن $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$ ولأنه لايوجد مصغرات من الدرجة الثالثة .

(ب) إن رتبة $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ تساوى 2 لأن $|A| = 0$ و $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$.

(جـ) إن رتبة $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ تساوى 1 لأن $|A| = 0$ ولأن المصغرات التسعة من الدرجة الثانية متلاشية وليست كل عناصر هذه المصفوفة أصفاراً .

٢ - برهن أن التحويلات الأولية لا تغير فى رتبة المصفوفة .

لن نعتبر هنا إلا تحويلات الصفوف ونترك كتمرين اعتبار تحويلات الأعمدة ، لتكن r رتبة المصفوفة A ذات الدرجة $m \times n$ لذلك تكون كل مصغرات A ذات الدرجة $(r+1)$ أصفاراً ولتكن B المصفوفة الناتجة عن A بتحويل الصفوف . لنرمز بالرمز $|R|$ لمصغر من الدرجة $(r+1)$ المصفوفة A وبالرمز $|S|$ لمصغر من الدرجة $(r+1)$ للمصفوفة B له نفس وضع $|R|$.

ليكن تحويل الصفوف هو (H_{ij}) إن تأثير هذا التحويل على $|R|$ أما (i) تركه بدون تغير وأما (ii) المبادلة بين اثنين من صفوفه أو (iii) المبادلة بين واحد من صفوفه وصف آخر لا يقع فى $|R|$. فى الحالة (i) يكون $|S| = |R| = 0$; وفى الحالة (ii) يكون $|S| = -|R| = 0$ أما فى الحالة (iii) فإن $|S|$ بإهمال الإشارة يكون مصغرا آخر من مصغرات $|A|$ من درجة $(r+1)$ وبالتالى يكون مساويا للصفر .

ليكن التحويل الصفى $H_i(k)$ أن تأثير هذا التحويل على $|R|$ هو إما (i) أن يتركه بدون تغيير وإما (ii) أن يضرب أحد صفوفه بالعدد k . ويكون على التوالى $|S| = |R| = 0$ أو $|S| = k|R| = 0$

ليكن التحويل الصفى هو $H_{ij}(k)$ أن مفعول هذا التحويل على $|R|$ هو إما (i) أن يتركه كما هو وإما (ii) أن يضيف إلى أحد صفوفه صفا آخر منه مضروبا بالعدد k أو (iii) أن يضيف إلى أحد صفوفه

صفا آخر ، لا يقع فى $|R|$ مضروبا بالعدد k . فى الحالتين (i) و (ii) يكون $0 = |R| = |S|$ أما فى الحالة (iii) فإنه يكون $|S| = |R| \pm k$ (مصفرا آخر من مصفرات A ذات الدرجة $(r+1)$) $= 0 \pm k.0 = 0$ مما تقدم يتضح ، أنه لا يمكن لتحويل صفوف أن يرفع رتبة مصفوفة كما أنه لا يمكن لهذا التحويل أن يخفض رتبة هذه المصفوفة لأنه لو حدث ذلك لرفع التحويل المعاكس رتبة المصفوفة ويمكننا أن نقول باختصار إن تحويلا أوليا للصفوف لا يغير فى رتبة المصفوفة التى يقع عليها هذا التحويل .

٣ – أوجد مصفوفة مكافئة B لكل واحدة من المصفوفات A الواردة فيما بعد ثم استنتج بالنظر رتبة A .

(أ)
$$A = \begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&2&1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&2&3\\0&-3&-3\\0&-4&-8\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&1\\0&1&2\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix} = B$$

إن التحويلات المستعملة هى على التوالى من اليسار إلى اليمين : $H_{21}(-2), H_{31}(-3); H_2(-1/3), H_3(-1/4); H_{32}(-1)$.
ونجد أن رتبة A هى 3 .

(ب)
$$A = \begin{bmatrix}1&2&3&0\\2&4&3&2\\3&2&1&3\\6&8&7&5\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&2&3&0\\0&0&-3&2\\0&-4&-8&3\\0&-4&-11&5\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&2&3&0\\0&-4&-8&3\\0&0&-3&2\\0&-4&-11&5\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&2&3&0\\0&-4&-8&3\\0&0&-3&2\\0&0&-3&2\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&2&3&0\\0&-4&-8&3\\0&0&-3&2\\0&0&0&0\end{bmatrix} = B.$$

رتبة A هى 3

(جـ)
$$A = \begin{bmatrix}1&1+i&-i\\0&i&1+2i\\1&1+2i&1+i\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&0&0\\0&i&1+2i\\1&i&1+2i\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&0&0\\0&i&1+2i\\0&0&0\end{bmatrix} = B.$$

رتبة A هى 2

ملاحظـــة :

إن المصفوفات المكافئة B التى حصلنا عليها هنا ليست وحيدة . بصورة خاصة لم تستعمل فى (أ) و (ب) سوى تحويلات صفوف ويمكن للقارىء أن يجد مصفوفات أخرى فيما لو استعمل تحويلات أعمدة . عندما تكون العناصر أعداداً كسرية لا يكون هناك على وجه العموم أى كسب ينتج عن استخدام تحويلات صفوف وتحويلات أعمدة سويا .

٤ – أوجد المصفوفة القانونية C والمكافئة صفيا لكل مصفوفة A من المصفوفات الواردة أدناه :

أ –
$$A = \begin{bmatrix}0&0&1&3&-2\\0&1&2&6&0\\0&2&3&9&2\\0&1&1&3&2\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}0&1&1&3&2\\0&1&2&6&0\\0&2&3&9&2\\0&0&1&3&-2\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}0&1&1&3&2\\0&0&1&3&-2\\0&0&1&3&-2\\0&0&1&3&-2\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}0&1&0&0&4\\0&0&1&3&-2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} = C$$

ب –
$$A = \begin{bmatrix}1&2&-2&3&1\\1&3&-2&3&0\\2&4&-3&6&4\\1&1&-1&4&6\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&2&-2&3&1\\0&1&0&0&-1\\0&0&1&0&2\\0&-1&1&1&5\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&0&-2&3&3\\0&1&0&0&-1\\0&0&1&0&2\\0&0&1&1&4\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&0&0&3&7\\0&1&0&0&-1\\0&0&1&0&2\\0&0&0&1&2\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&-1\\0&0&1&0&2\\0&0&0&1&2\end{bmatrix} = C$$

• ـ اختزل كلا من المصفوفات الواردة أدناه إلى شكلها العادي :

(أ)

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0&-1\\3&4&1&2\\-2&3&2&5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&0&-1\\0&-2&1&5\\0&7&2&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-2&1&5\\0&7&2&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&-2&5\\0&2&7&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&-2&5\\0&0&11&-7\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&11&-7\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$=[I_3\ 0]$$

إن التحويلات الأولية المستعملة مرتبة من اليسار إلى اليمين هي :

$$H_{21}(-3),\ H_{31}(2);\ K_{21}(-2),\ K_{41}(1);\ K_{23};\ H_{32}(-2);\ K_{32}(2),\ K_{42}(-5);\ K_3(1/11),\ K_{43}(7)$$

(ب)

$$A=\begin{bmatrix}0&2&3&4\\2&3&5&4\\4&8&13&12\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&3&5&4\\0&2&3&4\\4&8&13&12\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&5&4\\0&2&3&4\\2&8&13&12\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&5&4\\0&2&3&4\\0&2&3&4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&3&4\\0&2&3&4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&3&4\\0&1&3&4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}I_2&0\\0&0\end{bmatrix}$$

إن التحويلات الأولية المستعملة ، مرتبة من اليسار إلى اليمين هي :

$$H_{12};\ K_1(\tfrac{1}{2});\ H_{31}(-2);\ K_{21}(-3),\ K_{31}(-5),\ K_{41}(-4);\ K_2(\tfrac{1}{2});\ K_{32}(-3),\ K_{42}(-4);\ H_{32}(-1)$$

٦ ـ اختزل المصفوفة $A=\begin{bmatrix}1&2&3&-2\\2&-2&1&3\\3&0&4&1\end{bmatrix}$ إلى شكلها العادي N واحسب المصفوفتين P_1 و Q_1 بحيث تتحقق العلاقة $P_1AQ_1 = N$.

بما أن A من الدرجة 4×3 فإن علينا أن نعمل على الشكل $\begin{matrix}&I_4\\A&I_3\end{matrix}$ يجرى كل تحويل صفوف على صف مكون من سبعة عناصر كما يجرى كل تحويل أعمدة على عمود ذى سبعة عناصر .

$$\begin{matrix}1&0&0&0&&&\\0&1&0&0&&&\\0&0&1&0&&&\\0&0&0&1&&&\\1&2&3&-2&1&0&0\\2&-2&1&3&0&1&0\\3&0&4&1&0&0&1\end{matrix}\ \rightarrow\ \begin{matrix}1&0&0&0&&&\\0&1&0&0&&&\\0&0&1&0&&&\\0&0&0&1&&&\\1&2&3&-2&1&0&0\\0&-6&-5&7&-2&1&0\\0&-6&-5&7&-3&0&1\end{matrix}\ \rightarrow\ \begin{matrix}1&-2&-3&2&&&\\0&1&0&0&&&\\0&0&1&0&&&\\0&0&0&1&&&\\1&0&0&0&1&0&0\\0&-6&-5&7&-2&1&0\\0&-6&-5&7&-3&0&1\end{matrix}\ \rightarrow\ \begin{matrix}1&-2&-3&2&&&\\0&1&0&0&&&\\0&0&1&0&&&\\0&0&0&1&&&\\1&0&0&0&1&0&0\\0&-6&-5&7&-2&1&0\\0&0&0&0&-1&-1&1\end{matrix}$$

$$\rightarrow\ \begin{matrix}1&1/3&-3&2&&&\\0&-1/6&0&0&&&\\0&0&1&0&&&\\0&0&0&1&&&\\1&0&0&0&1&0&0\\0&1&-5&7&-2&1&0\\0&0&0&0&-1&-1&1\end{matrix}\ \rightarrow\ \begin{matrix}1&1/3&-4/3&-1/3&&&\\0&-1/6&-5/6&7/6&&&\\0&0&1&0&&&\\0&0&0&1&&&\\1&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&-2&1&0\\0&0&0&0&-1&-1&1\end{matrix}$$

$$Q_1$$

أو

$$N\ \ P_1$$

حيث

$$P_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-1&-1&1\end{bmatrix},\quad Q_1=\begin{bmatrix}1&1/3&-4/3&-1/3\\0&-1/6&-5/6&7/6\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\ \text{و}\quad P_1AQ_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=N.$$

٧ – عبر عن $A = \begin{bmatrix}1&3&3\\1&4&3\\1&3&4\end{bmatrix}$ كحاصل ضرب مصفوفات أولية :

تختزل التحويلات الأولية $H_{21}(-1), H_{31}(-1); K_{21}(-3), K_{31}(-3)$ مرتبة من اليسار إلى اليمين ، المصفوفة A إلى المصفوفة I_3 أى [أنظر (5.2)] .

$$I = H_2 \cdot H_1 \cdot A \cdot K_1 \cdot K_2 = H_{31}(-1) \cdot H_{21}(-1) \cdot A \cdot K_{21}(-3) \cdot K_{31}(-3)$$

ينتج من (5.5) أن :

$$A = H_1^{-1} \cdot H_2^{-1} \cdot K_2^{-1} \cdot K_1^{-1} = \begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1&3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

٨ – برهن ما يلى : تكون المصفوفتان A و B من الدرجة $m \times n$ متكافئتين فيما إذا كان (وإذا كان فقط) لهما رتبة واحدة .

إذا كانت رتبتا A و B متساويتين فإنهما تكافئان نفس المصفوفة (5.1) وتكون كل واحدة منها مكافئة للأخرى . على العكس إذا كانت A و B متكافئتين ، فإنه توجد مصفوفتان غير شاذتين P و Q بحيث يكون : $B = PAQ$ واستنادا إلى النظرية VII تكون المصفوفتين A و B نفس الرتبـة .

٩ – تتكون المجموعة القانونية لمصفوفة غير صفرية من الدرجة الثالثة مما يلى :

$$I_3, \quad \begin{bmatrix}I_2&0\\0&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}I_1&0\\0&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

وتتكون المجموعة القانونية لمصفوفة غير صفرية درجتها 3×4 مما يلى :

$$[I_3 \;\; 0] = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}I_2&0\\0&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}I_1&0\\0&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

١٠ – إذا اخترنا من مصفوفة مربعة A من الدرجة n والرتبة r_A مصفوفة جزئية B مكونة من s صفا (عمودا) فإن r_B رتبة B تساوى أو تزيد عن $r_A + s - n$.

إن الشكل العادى للمصفوفة A يكون له $(n - r_B)$ صفا عناصره أصفار وإن الشكل العادى للمصفوفة B يكون له $(s - r_B)$ صفا عناصره أصفارا ومن الواضح أن :

$$n - r_A \geq s - r_B$$

ومنها $r_B \geq r_A + s - n$ كما هو مطلوب .

مسـائل اضـافية

١١ – أوجد رتبة كل من المصفوفات : (١) $\begin{bmatrix}1&2&3&2\\2&3&5&1\\1&3&4&5\end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix}1&2&1&2\\1&3&2&2\\2&4&3&4\\3&7&4&6\end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix}1&2&-2&3\\2&5&-4&6\\-1&-3&2&-2\\2&4&-1&6\end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix}3&4&5&6&7\\4&5&6&7&8\\5&6&7&8&9\\10&11&12&13&14\\15&16&17&18&19\end{bmatrix}$

الجواب : (١) 2 ، (ب) 3 ، (جـ) 4 (د) 2

١٢ – برهن باعتبار المصغرات أن المصفوفات A و A' و A و A' نفس الرتبة .

١٣ – برهن أن المصفوفة القانونية C المكافئة صفيا لمصفوفة معينة A تتحدد تحديدا تاما بواسطة A فقط .

١٤ – أوجد المصفوفة القانونية C المكافئة صفيا لكل من المصفوفات التالية :

(أ) $\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\2 & 5 & -4\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & -7\\0 & 1 & 2\end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\3 & 4 & 1 & 2\\4 & 3 & 1 & 2\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1/9\\0 & 1 & 0 & 1/9\\0 & 0 & 1 & 11/9\end{bmatrix}$ (ﺟ) $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 2\\2 & 1 & -3 & -6\\3 & -3 & 1 & 2\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$

(د) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\3 & 2 & 1 & 2\\2 & -1 & 2 & 5\\5 & 6 & 3 & 2\\1 & 3 & -1 & -3\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & -1\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ (ﻫ) $\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 1 & 1\\1 & -1 & 2 & 3 & 1\\2 & -2 & 1 & 0 & 2\\1 & 1 & -1 & -3 & 3\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1 & 2\\0 & 1 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

١٥ – اكتب الشكل العادى لكل من مصفوفات المسألة ١٤ .

الجواب : (أ) $[I_2\ 0]$، (ب) ، (ﺟ) $[I_3\ 0]$

(د) $\begin{bmatrix}I_3 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$ ، (ﻫ) $\begin{bmatrix}I_3 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$

١٦ – لتكن المصفوفة $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\2 & 3 & 4 & 1\\3 & 4 & 1 & 2\end{bmatrix}$.

(أ) من I_3 كون $H_{12},\ H_2(3),\ H_{13}(-4)$ ثم برهن أن كل HA يعطى ناتج تحويل الصفوف المناظر .

(ب) من I_4 كون $K_{24},\ K_3(-1),\ K_{42}(3)$ ثم برهن أن كل AK يعطى ناتج تحويل الأعمدة المناظرة .

(ﺟ) اكتب المعكوسات $H_{12}^{-1},\ H_2^{-1}(3),\ H_{13}^{-1}(-4)$ للمصفوفات الأولية الواردة فى (أ) وبرهن أنه لكل H يتحقق $H.H^{-1} = I$.

(د) اكتب المعكوسات $K_{24}^{-1},\ K_3^{-1}(-1),\ K_{42}^{-1}(3)$ للمصفوفات الأولية الواردة من (ب) وبرهن أنه لكل K يتحقق $KK^{-1} = I$.

(ﻫ) احسب $B = H_{12}\cdot H_2(3)\cdot H_{13}(-4) = \begin{bmatrix}0 & 3 & 0\\1 & 0 & -4\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ و $C = H_{13}^{-1}(-4)\cdot H_2^{-1}(3)\cdot H_{12}^{-1} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 4\\1/3 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

(و) برهن أن $B\ C = C\ B = I$.

١٧ – (أ) برهن أن $K'_{ij} = H_{ij}$ و $K'_i(k) = H_i(k)$ و $K'_{ij}(k) = H_{ij}(k)$.

(ب) برهن أنه إذا كان R حاصل ضرب مصفوفات أعمدة أولية ، فإن R' حاصل الضرب بترتيب معاكس ، لنفس مصفوفات الصفوف الأولية .

١٨ – برهن ما يلى : (أ) يكون كل من AB و BA غير شاذا فيما إذا كانت A و B مصفوفتين غير شاذتين مربعتين من الدرجة n .

(ب) يكون كل من AB و BA شاذ فيما إذا كانت على الأقل واحدة من المصفوفتين A و B المربعتين ومن الدرجة n ، شاذة .

١٩ – إذا كانت A و Q غير شاذتين فبرهن أن A ، PA و AQ و PAQ تكون لها نفس الرتبة .

توضيح : اكتب P و Q كحاصل ضرب مصفوفات أولية .

٢٠ – اختزل المصفوفة $B=\begin{bmatrix}1&3&6&-1\\1&4&5&1\\1&5&4&3\end{bmatrix}$ إلى شكل عادى N واحسب المصفوفتين P_2 و Q_2 اللتين تحققان العلاقة $P_2BQ_2=N$.

٢١ – (ا) برهن أن عدد المصفوفات فى مجموعة قانونية لمصفوفة مربعة من الدرجة n بالنسبة للتكافؤ ، يساوى $(n+1)$

(ب) برهن أن عدد المصفوفات ، فى مجموعة قانونية لمصفوفة درجتها $m\times n$ بالنسبة للتكافؤ ، يساوى أصغر العددين $(m+1)$ و $(n+1)$.

٢٢ – إذا أعطيت المصفوفة $A=\begin{bmatrix}1&2&4&4\\1&3&2&6\\2&5&6&10\end{bmatrix}$ والتى رتبتها 2 ، فأوجد مصفوفة مربعة من الدرجة الرابعة $B\neq 0$ وتحقق العلاقة $AB=0$

توضيح : اتبع برهان النظرية X وخـذ :

$$Q^{-1}B = \begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\a&b&c&d\\e&f&g&h\end{bmatrix}$$

حيث $a, b, \ldots, h$ أعداد اختيارية .

٢٣ – المصفوفتان A من المسألة ٦ و B من المسألة ٢٠ متكافئتان . أوجـد P و Q بحيث يكون $B=PAQ$

٢٤ – إذا كانت A مصفوفة من الدرجة $m\times n$ ورتبتها r_A ، B مصفوفة من نفس الدرجة ورتبتها r_B فبرهن أن رتبة المصفوفة $A+B$ لا تزيد عن r_A+r_B .

٢٥ – لتكن A مصفوفة اختيارية مربعه ومن الدرجة n و B مصفوفة أولية مربعة ومن الدرجة n أيضا . باعتبار كل من الصور الستة المختلفة للمصفوفة B فأثبت أن $|AB|=|A|.|B|$.

٢٦ – نفرض أن A و B مصفوفتان مربعتان من الدرجة n.

(ا) إذا كانت واحدة ، على الأقل منها شاذة نبرهن أن $|AB|=|A|.|B|$.

(ب) إذا كانتا معا غير شاذتين ، استخدم (5.5) والمسألة (٢٥) لكى نبرهن أن $|AB|=|A|.|B|$.

٢٧ – برهن أن تكافؤ المصفوفات علاقة تكافؤ .

٢٨ – برهن أن الشكل الصفى التكافئى القانونى لمصفوفة غير شاذة A هو I والعكس بالعكس .

٢٩ – برهن أنه لا يمكن تحويل كل مصفوفة A إلى شكل عادى بواسطة تحويلات صفوف فقط .

توضيح : أوجد مصفوفة لا يمكن اختزالها بهذا الشكل .

٣٠ – بين كيف يمكنك أن تطبق على أى مصفوفة A التحويل H_{ij} باستعمال تتابع من تحويلات الصفوف من النوع (٢) والنوع (٣) .

٣١ – برهن أنه إذا كانت A مصفوفة درجتها $m\times n$ حيث $(m\leq n)$ ورتبتها m فإن AA' تكون مصفوفة متماثلة غير شاذة . أذكر النظرية المقابلة عندما تكون رتبة A أصغر من m .

الفصل السادس

المصفوفة المرافقة لمصفوفة مربعة

المصفوفة المرافقة :

إذا كانت $A = [a_{ij}]$ مصفوفة مربعة من درجة n وكان α_{ij} المعامل المرافق للعنصر a_{ij} فإننا نسمي ، بالتعريف ، المصفوفة

$$\text{adjoint } A = \text{adj } A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \qquad (6.1)$$

المصفوفة المرافقة للمصفوفة A

يجب ملاحظة أن المعاملات المرافقة لعناصر الصف (العمود) ذى الرقم i من A هى عناصر العمود (الصف) ذى الرقم i من $adj\ A$

مثال ١ : في المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

يكون

$$\alpha_{11} = 6,\ \alpha_{12} = -2,\ \alpha_{13} = -3,\ \alpha_{21} = 1,\ \alpha_{22} = -5,\ \alpha_{23} = 3,\ \alpha_{31} = -5,\ \alpha_{32} = 4,\ \alpha_{33} = -1$$

ومنه

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

انظر المسألتين ١ – ٢

باستخدام النظريتين X و XI من الفصل ٣ فإننا نجد .

$$A(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \qquad (6.2)$$

$$= \text{diag}(|A|, |A|, \ldots, |A|) = |A|\ I_n = (\text{adj } A)\ A$$

مثال ٢ :

في المصفوفة A الواردة في المثال ١ يكون : $|A| = -7$ وكذلك

$$A(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} = -7I$$

بأخذ محددات طرفي العلاقة (6.2) فإننا نجد :

$$|A| \cdot |\text{adj}\, A| = |A|^n = |\text{adj}\, A| \cdot |A| \quad (6.3)$$

وينتج عن ذلك :

I – إذا كانت A مصفوفة مربعة من درجة n وغير شاذة فإنه يكون :

$$|\text{adj}\, A| = |A|^{n-1} \quad (6.4)$$

II – إذا كانت A مصفوفة مربعة من درجة n وشاذة فإنه يكون :

$$A(\text{adj}\, A) = (\text{adj}\, A)A = 0$$

إذا كانت رتبة A أصغر من $(n-1)$ فإن $adj\ A = 0$ إذا كانت رتبة A تساوى $(n\text{-}1)$ فإن رتبة $adj\ A$ تساوى الواحد .

انظر المسألة ٣ .

المصفوفة المرافقة لحاصل ضرب مصفوفتين :

سنبرهن فى المسألة ٤ .

III – إذا كانت A و B مصفوفتين مربعتين من درجة n فإن :

$$\text{adj}\, AB = \text{adj}\, B \cdot \text{adj}\, A \quad (6.5)$$

مصغر مصفوفة مرافقة :

سنبرهن فى المسألة ٦ :

IV – ليكن $\left|A^{j_1, j_2, \ldots, j_m}_{i_1, i_2, \ldots, i_m}\right|$ مصغرا مربعا من درجة m للمصفوفة المربعة $A = [\,a_{ij}\,]$ ذات الدرجة n وليكن $A^{j_{m+1}, j_{m+2}, \ldots, j_n}_{i_{m+1}, i_{m+2}, \ldots, i_n}$ متممة فى A ،

ونفرض أن $M^{j_1, j_2, \ldots, j_m}_{i_1, i_2, \ldots, i_m}$ يرمز للمصغر المربع من الدرجة m للمصفوفة $adj\ A$ والذى تحتل عناصره فى $adj\ A$ المواقع ذاتها التى تحتلها عناصر $\left|A^{j_1, j_2, \ldots, j_m}_{i_1, i_2, \ldots, i_m}\right|$ فى A

ينتج مما تقدم أن :

$$|A| \cdot \left|M^{j_1, j_2, \ldots, j_m}_{i_1, i_2, \ldots, i_m}\right| = (-1)^s |A|^m \cdot \left|A^{j_{m+1}, j_{m+2}, \ldots, j_n}_{i_{m+1}, i_{m+2}, \ldots, i_n}\right| \quad (6.6)$$

حيث :

$$s = i_1 + i_2 + \cdots + i_m + j_1 + j_2 + \cdots + j_m \,.$$

إذا كانت فى (6.6) المصفوفة A غير شاذة فإن :

$$\left|M^{j_1, j_2, \ldots, j_m}_{i_1, i_2, \ldots, i_m}\right| = (-1)^s |A|^{m-1} \cdot \left|A^{j_{m+1}, j_{m+2}, \ldots, j_n}_{i_{m+1}, i_{m+2}, \ldots, i_n}\right| \quad (6.7)$$

إذا كانت $m = 2$ فإن العلاقة (6.3) تأخذ الشكل :

$$\begin{vmatrix} \alpha_{i_1,j_1} & \alpha_{i_2,j_1} \\ \alpha_{i_1,j_2} & \alpha_{i_2,j_2} \end{vmatrix} = (-1)^{i_1+i_2+j_1+j_2}|A| \cdot \left|A^{j_3,j_4,\ldots,j_n}_{i_3,i_4,\ldots,i_n}\right| \quad (6.8)$$

وهذا يساوي حاصل ضرب $|A|$ بالمتمم الجبرى لـ $\left|A^{j_1,j_2}_{i_1,i_2}\right|$

إذا كانت $m = n - 1$ فإن العلاقة (6.7) تأخذ الشكل.

$$\left|M^{j_1,j_2,\ldots,j_{n-1}}_{i_1,i_2,\ldots,i_{n-1}}\right| = (-1)^{i_n+j_n}|A|^{n-2} a_{i_n,j_n} \quad (6.9)$$

وإذا كانت $m = n$ فإن العلاقة (6.7) تأخذ شكل العلاقة (6.4)

مسائل محلولة

١ – إن المصفوفة المرافقة لمصفوفة $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هى المصفوفة $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$

٢ – إن المصفوفة المرافقة لمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ هى المصفوفة

$$\begin{bmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

٣ – برهن أنه إذا كانت المصفوفة A من درجة n ورتبتها $n - 1$ فإن $adjA$ تكون ذات رتبة مساوية للواحد.

حيث أن المصفوفة A من الرتبة $n-1$ فإنه يوجد معامل مرافق واحد على الأقل، لا يساوى الصفر. وإن رتبة $adj A$ تساوى على الأقل الواحد. استنادا إلى النظرية X من الفصل الخامس، نجد أن رتبة $adjA$ هى على الأكثر $n-(n-1) = 1$ وينتج مما تقدم أن الرتبة تساوى الواحد فعلا.

٤ – أثبت أن $adj\ A\ B = adj\ B\ .\ adj\ A$.

من (6.2) نحصل على $AB\ adj\ AB = |AB|\ .I = (adj\ AB)\ AB$

وبما أن :

$$AB \cdot \text{adj}\,B \cdot \text{adj}\,A = A(B \cdot \text{adj}\,B)\text{adj}\,A = A(|B| \cdot I)\text{adj}\,A = |B|(A\ \text{adj}\,A) = |B| \cdot |A| \cdot I = |AB| \cdot I$$

و

$$(\text{adj}\,B \cdot \text{adj}\,A)AB = \text{adj}\,B\{(\text{adj}\,A)A\}B = \text{adj}\,B \cdot |A| \cdot I \cdot B = |A|\{(\text{adj}\,B)B\} = |AB| \cdot I$$

فإننا نستنتج : $adj\ AB = adj\ B\ .\ adj\ A$

٥ – أثبت أن $\text{adj}(\text{adj}\,A) = |A|^{n-2} \cdot A$، وذلك إذا كان $|A| \neq 0$

من (6.2) و(6.4) نحصل على

$$\begin{aligned} \text{adj}\,A \cdot \text{adj}(\text{adj}\,A) &= \text{diag}(|\text{adj}\,A|, |\text{adj}\,A|, \ldots, |\text{adj}\,A|) \\ &= \text{diag}(|A|^{n-1}, |A|^{n-1}, \ldots, |A|^{n-1}) \end{aligned}$$

وينتج عما تقدم :

$$A \cdot \operatorname{adj} A \cdot \operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) = |A|^{n-1} \cdot A$$

و

$$|A| \cdot \operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) = |A|^{n-1} \cdot A$$

$$\operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) = |A|^{n-2} \cdot A$$

* – برهن ما يلى :

إذا كان $\left|A^{j_1, j_2, \ldots, j_m}_{i_1, i_2, \ldots, i_m}\right|$ مصغرا مربعا من درجة m للمصفوفة المربعة $A = [a_{ij}]$ ذات الدرجة n

وإذا كان $\left|A^{j_{m+1}, j_{m+2}, \ldots, j_n}_{i_{m+1}, i_{m+2}, \ldots, i_n}\right|$ متمم هذا المصغر فى A .

وإذا رمز $\left|M^{j_1, j_2, \ldots, j_m}_{i_1, i_2, \ldots, i_m}\right|$ للمصغر المربع من درجة m لـ $adj\ A$ والذى تحتل عناصره من $adj\ A$ المواقع ذاتها

التى تحتلها عناصر $\left|A^{j_1, j_2, \ldots, j_m}_{i_1, i_2, \ldots, i_m}\right|$ فى A ، فإن :

$$|A| \cdot \left|M^{j_1, j_2, \ldots, j_n}_{i_1, i_2, \ldots, i_m}\right| = (-1)^s |A|^m \cdot \left|A^{j_{m+1}, j_{m+2}, \ldots, j_n}_{i_{m+1}, i_{m+2}, \ldots, i_n}\right|$$

حيث :

$$s = i_1 + i_2 + \cdots + i_m + j_1 + j_2 + \cdots + j_m \,.$$

من

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc}
a_{i_1, j_1} & a_{i_1, j_2} & \cdots & a_{i_1, j_m} & a_{i_1, j_{m+1}} & \cdots & a_{i_1, j_n} \\
a_{i_2, j_1} & a_{i_2, j_2} & \cdots & a_{i_2, j_m} & a_{i_2, j_{m+1}} & \cdots & a_{i_2, j_n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i_m, j_1} & a_{i_m, j_2} & \cdots & a_{i_m, j_m} & a_{i_m, j_{m+1}} & \cdots & a_{i_m, j_n} \\
\hline
a_{i_{m+1}, j_1} & a_{i_{m+1}, j_2} & \cdots & a_{i_{m+1}, j_m} & a_{i_{m+1}, j_{m+1}} & \cdots & a_{i_{m+1}, j_n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i_n, j_1} & a_{i_n, j_2} & \cdots & a_{i_n, j_m} & a_{i_n, j_{m+1}} & \cdots & a_{i_n, j_n}
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{cccc|cccc}
\alpha_{i_1, j_1} & \alpha_{i_2, j_1} & \cdots & \alpha_{i_m, j_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\alpha_{i_1, j_2} & \alpha_{i_2, j_2} & \cdots & \alpha_{i_m, j_2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\alpha_{i_1, j_m} & \alpha_{i_2, j_m} & \cdots & \alpha_{i_m, j_m} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
\alpha_{i_1, j_{m+1}} & \alpha_{i_2, j_{m+1}} & \cdots & \alpha_{i_m, j_{m+1}} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\alpha_{i_1, j_n} & \alpha_{i_2, j_n} & \cdots & \alpha_{i_m, j_n} & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc}
|A| & 0 & \cdots & 0 & a_{i_1, j_{m+1}} & \cdots & a_{i_1, j_n} \\
0 & |A| & \cdots & 0 & a_{i_2, j_{m+1}} & \cdots & a_{i_2, j_n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & |A| & a_{i_m, j_{m+1}} & \cdots & a_{i_m, j_n} \\
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 & a_{i_{m+1}, j_{m+1}} & \cdots & a_{i_{m+1}, j_n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & a_{i_n, j_{m+1}} & \cdots & a_{i_n, j_n}
\end{array}\right]$$

بأخذ محددات الطرفين نحصل على :

$$(-1)^s |A| \cdot \left| M_{i_1, i_2, \ldots, i_m}^{j_1, j_2, \ldots, j_m} \right| = |A|^m \cdot \left| A_{i_{m+1}, i_{m+2}, \ldots, i_n}^{j_{m+1}, j_{m+2}, \ldots, j_n} \right|$$

حيث s معرف فى نص النظرية . ينتج عما تقدم ، المطلوب مباشرة .

٧ - برهن أنه إذا كانت A مصفوفة متماثلة تخالفية من الدرجة $2n$ فإن $|A|$ يكون مربع كثير (متعدد) حدود مكون من عناصر A .

من التعريف $|A|$ يكون كثير حدود مكونا من عناصرها ، فعلينا أن نبرهن تحت الشروط الواردة أعلاه ، أن كثير الحدود ، هذا ، مربع تام .

إن النظرية صحيحة فى حالة $n=1$ لأنه عندما يكون $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$ فإن $|A| = a^2$

والآن نفرض، أن النظرية صحيحة فى حالة $n = k$ واعتبر المصفوفة المتماثلة التخالفية $A = [a_{ij}]$ ذات الدرجة $2k+2$ يمكننا أن نكتب بالتجزئة $A = \begin{bmatrix} B & C \\ D & E \end{bmatrix}$ حيث $E = \begin{bmatrix} 0 & a_{2k+1, 2k+2} \\ a_{2k+2, 2k+1} & 0 \end{bmatrix}$ وتكون B مصفوفة متماثلة تخالفية من الدرجة $2k$. من الفرض $|B| = f^2$ حيث f كثير حدود مكون من عناصر B .

إذا رمزنا بالزمز α_{ij} للمعامل المرافق للعنصر a_{ij} من A فإننا نجد استنادا إلى المسألة ٦ من الفصل الثالث والعلاقة (6.8) :

$$\begin{vmatrix} \alpha_{2k+1, 2k+1} & \alpha_{2k+2, 2k+1} \\ \alpha_{2k+1, 2k+2} & \alpha_{2k+2, 2k+2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_{2k+2, 2k+1} \\ \alpha_{2k+1, 2k+2} & 0 \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$$

علاوة على ذلك : $\alpha_{2k+2, 2k+1} = -\alpha_{2k+1, 2k+2}$ أى أن

$|A| \cdot f^2 = \alpha^2_{2k+1, 2k+2}$ و $|A| = \left\{ \dfrac{\alpha_{2k+1, 2k+2}}{f} \right\}^2$ وهو ما يثبت المطلوب .

مســـائل اضــافية

٨ - احسب المصفوفة المرافقة لكل من :

(أ) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (حـ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

الجواب :

(أ) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، (ب) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، (حـ) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ ، (د) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & 6 & 0 & -16 \\ 1 & 0 & 3 & -5 \\ -2 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$

٩ – تحقق من أن :

(أ) المصفوفة المرافقة لمصفوفة عددية هي مصفوفة عددية .

(ب) المصفوفة المرافقة لمصفوفة قطرية هي مصفوفة قطرية .

(جـ) المصفوفة المرافقة المصفوفة مثلثية هي مصفوفة مثلثية .

١٠ – اكتب مصفوفة $A \neq 0$ من الدرجة الثالثة بحيث يكون $adj\ A = 0$.

١١ – إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة الثانية . فبرهن أن : $adj\ (adj\ A) = A$.

١٢ – أثبت أن المصفوفة المرافقة لمصفوفة $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ هي $3A'$ وأن المصفوفة المرافقة لمصفوفة $A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ هي A نفسها .

١٣ – برهن أنه إذا كانت رتبة المصفوفة A المربعة من الدرجة n أصغر من $(n-1)$ فإن $adjA = 0$.

١٤ – برهن أنه إذا كانت A مصفوفة متماثلة فإن $adj\ A$ تكون متماثلة أيضا .

١٥ – برهن أنه إذا كانت A مصفوفة هرميتية فإن $adj\ A$ تكون هرميتية أيضا .

١٦ – برهن أنه إذا كانت A مصفوفة متماثلة تخالفية من الدرجة n فإن $adj\ A$ تكون متماثلة أو متماثلة تخالفية بحسب ما يكون n فرديا أو زوجيا .

١٧ – هل توجد نظرية مشابهة لنظرية المسألة ١٦ تتعلق بالمصفوفات الهرميتية التخالفية ؟

١٨ – بين أنه في حالة المصفوفات الأولية يكون :

(أ) $adj\ H_{ij}^{-1} = -H_{ij}$

(ب) $adj\ H_i^{-1}(k) = diag(1/k, 1/k, \ldots, 1/k, 1, 1/k, \ldots, 1/k)$, حيث يقع العنصر 1 في الصف ذي الرقم i .

(جـ) $adj\ H_{ij}^{-1}(k) = H_{ij}(k)$, مع نتائج مشابهة للتحويلات K .

١٩ – برهن أنه إذا كانت A مصفوفة مربعة من درجة n ومن الرتبة n أو $(n-1)$ وإذا كان $H_s \ldots H_2 \cdot H_1 \cdot A \cdot K_1 \cdot K_2 \ldots K_t = \lambda$ حيث λ رمز لـ I_n أو $\begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, فإن :

$$adj\ A = adj\ K_1^{-1} \cdot adj\ K_2^{-1} \ldots adj\ K_t^{-1} \cdot adj\ \lambda \cdot adj\ H_s^{-1} \ldots adj\ H_2^{-1} \cdot adj\ H_1^{-1}$$

٢٠ – استخدم الطريقة الواردة في المسألة ١٩ لحساب المصفوفة المرافقة للمصفوفات :

(أ) المصفوفة A الواردة في المسألة ٧ من الفصل الخامس .

(ب) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 7 & 4 \end{bmatrix}$

الجواب (أ) $\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} -14 & 2 & -2 & 2 \\ 14 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

٢١ – نفرض أن المصفوفتين $A = [\,a_{ij}\,]$ و $B = [\,k - a_{ij}\,]$ مصفوفتان مربعتان من الدرجة الثالثة . إذا كان $S\,(C)$ يمثل مجموع عناصر مصفوفة C ، فبرهن أن

$$S(\text{adj}\,A) = S(\text{adj}\,B) \quad \text{و} \quad |B| = k \cdot S(\text{adj}\,A) - |A|$$

٢٢ – برهن أنه إذا كانت A مصفوفة مربعة من درجة n فإن :

$$|\,\text{adj}\,(\text{adj}\,A)\,| = |A|^{(n-1)^2}$$

٢٣ – لنفرض أن $A_n = [a_{ij}]\ \ (i, j = 1, 2, \ldots, n)$ مصفوفة مثلثية سفلى مثلثها هو مثلث باسكال ، مثال ذلك :

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

افرض $b_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}$ وأثبت أنه إذا كانت $n = 2, 3, 4$ فإن :

$$\text{(i)} \qquad \text{adj}\,A_n = [b_{ij}] = A_n^{-1}$$

٢٤ – لنفرض أن المصفوفة B تنتج عن المصفوفة A بحذف صفيها اللذين يحملان الرقمين i و p وعموديها اللذين يحملان الرقمين j و q برهن أن :

$$\begin{vmatrix} \alpha_{ij} & \alpha_{pj} \\ \alpha_{iq} & \alpha_{pq} \end{vmatrix} = (-1)^{i+p+j+q} |B| \cdot |A|$$

حيث α_{ij} هو المعامل المرافق للعنصر a_{ij} في $|A|$.

الفصل السابع

معكوس مصفوفة

إذا كانت A و B مصفوفتين مربعتين من درجة n بحيث كان $AB = BA = I$ فإن B تسمى معكوس المصفوفة A ، ($B = A^{-1}$) وأن A تدعى معكوس المصفوفة B ، ($A = B^{-1}$)

سنبرهن فى المسألة ١ أن :

I. يكون للمصفوفة المربعة من درجة n معكوس إذا (وإذا فقط) كانت غير شاذة .

إن معكوس مصفوفة A المربعة ومن درجة n غير شاذة ، هى مصفوفة وحيدة . (انظر المسألة ٧ من الفصل ٢) .

II. إذا كانت A غير شاذة فإن $AB = AC$ يستلزم $B = C$

معكوس المصفوفة القطرية غير الشاذة $\text{diag}(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ هى المصفوفة القطرية :

$$\text{diag}(1/k_1, 1/k_2, \ldots, 1/k_n)$$

إذا كانت المصفوفات $A_1, A_2, \ldots, A_s$ غير شاذة ، فإن معكوس المجموع المباشر $\text{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_s)$ هو :

$$\text{diag}(A_1^{-1}, A_2^{-1}, \ldots, A_s^{-1})$$

سنقدم فيما يلى طرق إيجاد معكوس مصفوفة عامة غير شاذة .

إيجاد المعكوس باستخدام المصفوفات المرافقة من العلاقة (6.2) يكون $A \; adj\, A = |A| \cdot I$.

إذا كانت A مصفوفة غير شاذة فإن

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}\, A}{|A|} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}/|A| & \alpha_{21}/|A| & \ldots & \alpha_{n1}/|A| \\ \alpha_{12}/|A| & \alpha_{22}/|A| & \ldots & \alpha_{n2}/|A| \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{1n}/|A| & \alpha_{2n}/|A| & \ldots & \alpha_{nn}/|A| \end{bmatrix} \qquad (7.1)$$

مثال ١ :

من المسألة ٢ من الفصل ٦ نجد أن مرافق $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ هو $\begin{bmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

وبما أن $|A| = -2$ فإن $A^{-1} = \frac{\text{adj}\, A}{|A|} = \begin{bmatrix} 7/2 & -3 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ انظر المسألة ٢.

إيجاد المعكوس باستخدام المصفوفات الأولية : لنفرض A مصفوفة مربعة غير شاذة من درجة n قد اختزلت إلى المصفوفة I بواسطة التحويلات الأولية بحيث يكون : $H_s \ldots H_2 \cdot H_1 \cdot A \cdot K_1 \cdot K_2 \ldots K_t = PAQ = I$

من (5.5) نجد أن $A = P^{-1} . Q^{-1}$ وبما أن $(B^{-1})^{-1} = B$ إذن

$$A^{-1} = (P^{-1} \cdot Q^{-1})^{-1} = Q \cdot P = K_1 \cdot K_2 \dots K_t \cdot H_s \dots H_2 \cdot H_1 \qquad (7.2)$$

مثال ٢ :

من المسألة ٧ من الفصل الخامس نحصل على :

$$H_2H_1AK_1K_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

ومن ثم

$$A^{-1} = K_1K_2H_2H_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

لقد برهنا فى الفصل الخامس أنه يمكن تحويل مصفوفة غير شاذة إلى الشكل العادى بواسطة تحويلات الصفوف فقط . وعلى ذلك واستنادا إلى (7.2) وبفرض $Q = I$ نجد :

$$A^{-1} = P = H_s \dots H_2 \cdot H_1 \qquad (7.3)$$

وعلى ذلك فإنه يمكن القول :

III. إذا حولت المصفوفة A إلى I بواسطة متوالية من تحويلات الصفوف فقط ، فإن A^{-1} تساوى حاصل الضرب بترتيب معاكس ، المصفوفات الأولية المناظرة لهذه التحويلات .

مثال ٣ :

أوجد معكوس المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ الواردة فى المثال ٢ وذلك باستعمال تحويلات صفوف فقط ، لتحويل A إلى I

اكتب المصفوفة $[A \mid I_3]$ ثم طبق على صفوفها ذات العناصر الستة ، متوالية من تحويلات الصفوف التى تحول المصفوفة A إلى I_3 فنجد :

$$[A\ I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$= [I_3\ A^{-1}]$$

وذلك استنادا إلى (7.3) . وحيث أن A قد تحولت إلى I_3 ، فإن I_3 قد تحولت إلى $A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ انظر المسألة ٣ .

ايجاد معكوس مصفوفة بطريقة التجزئة :

لنفرض $A = [a_{ij}]$ مصفوفة من درجة n وأن $B = [b_{ij}]$ معكوس هذه المصفوفة ، ولنفرض أن هاتين المصفوفتين قد جزئتا إلى مصفوفات جزئية من الدرجات المبينة كما يلى :

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ (p\times p) & (p\times q) \\ \hline A_{21} & A_{22} \\ (q\times p) & (q\times q) \end{array}\right] \quad \text{و} \quad \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ (p\times p) & (p\times q) \\ \hline B_{21} & B_{22} \\ (q\times p) & (q\times q) \end{array}\right] \quad \text{حيث} \quad p + q = n$$

بما أن $AB - BA = I_n$ فإننا نجد :

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = I_p & \text{(iii)} \quad B_{21}A_{11} + B_{22}A_{21} = 0 \\ \text{(ii)} \quad A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = 0 & \text{(iv)} \quad B_{21}A_{12} + B_{22}A_{22} = I_q \end{cases} \qquad (7.4)$$

وإذا كانت A_{11} غير شاذة فإنه يكون :

$$\begin{cases} B_{11} = A_{11}^{-1} + (A_{11}^{-1}A_{12})\xi^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1}) & B_{21} = -\xi^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1}) \\ B_{12} = -(A_{11}^{-1}A_{12})\xi^{-1} & B_{22} = \xi^{-1} \end{cases} \qquad (7.5)$$

حيث :
$$\xi = A_{22} - A_{21}(A_{11}^{-1}A_{12}).$$
انظر المسألة ٤ .

في الحالات الفعلية ، يؤخذ A_{11} من الدرجة ($n-1$) وللحصول على A_{11}^{-1} تستعمل الطريقة التالية :

ليكن :

$$G_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad G_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad G_4 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix},$$

بعد حساب G_2^{-1} تجزئ G_3 بحيث يكون $A_{22} = [a_{33}]$ وتستخدم العلاقة (7.5) لكي تحصل على G_3^{-1} . تكرر هذه الطريقة على G_4 بعد أن تجزئها بحيث يكون $A_{22} = [a_{44}]$ وهكذا ...

مثال ٤ : $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

أوجد معكوس المصفوفة باستعمال طريقة التجزئة :

خذ $A_{21} = [1\ 3]$، $A_{12} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$، $A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ و $A_{22} = [4]$. فنجد عندها

$$A_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{11}^{-1}A_{12} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_{21}A_{11}^{-1} = [1\ 3]\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = [1\ 0].$$

$$\xi = A_{22} - A_{21}(A_{11}^{-1}A_{12}) = [4] - [1\ 3]\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = [1], \quad \text{و} \quad \xi^{-1} = [1]$$

ومن ثم

$$B_{11} = A_{11}^{-1} + (A_{11}^{-1}A_{12})\xi^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1}) = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}[1]\cdot[1\ 0]$$
$$= \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{12} = -(A_{11}^{-1}A_{12})\xi^{-1} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{21} = -\xi^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1}) = [-1\ 0]$$

$$B_{22} = \xi^{-1} = [1]$$

ونجد أخيرا :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

انظر المسألتين ٥ – ٦

معكوس مصفوفة متماثلة : إذا كانت المصفوفة A متماثلة ، أى $a_{ij} = a_{ji}$ فإننا لن نحتاج لحساب أكثر من $\frac{1}{2}n(n+1)$ معاملا مرافقا ، بدلا من حساب n^2 للحصول على A^{-1} من $adj\ A$.

إذا كانت هناك أى فائدة من حساب A^{-1} كحاصل ضرب مصفوفات أولية ، فإنه يجب إجراء التحويلات الأولية بحيث نحافظ على خاصة التماثل التى تتمتع بها المصفوفة المفروضة وهذا يتطلب إجراء التحويلات أزواجا أزواجا بحيث إذا أجرى تحويل صفوف فإن علينا أن نتبعه مباشرة بنفس التحويل المقابل للأعمدة . مثال ذلك :

$$H_{12}\begin{bmatrix} 0 & b & c & \cdots \\ b & a & \cdots\cdots \\ c & \cdots\cdots\cdots \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}K_{12} = \begin{bmatrix} a & b & \cdots\cdots \\ b & 0 & c & \cdots \\ \cdot & c & \cdots\cdots \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

$$H_{21}(-\tfrac{b}{a})\begin{bmatrix} a & b & c & \cdots \\ b \\ c \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}K_{21}(-\tfrac{b}{a}) = \begin{bmatrix} a & 0 & c & \cdots \\ 0 \\ c \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

بصورة خاصة ، لتحويل العنصر القطرى a إلى 1 نحتاج إلى التحويلين $H_1(1/\sqrt{a})$ و $K_1(1/\sqrt{a})$. وسيكون بصورة عامة إما أن يكون $\sqrt{a}$ عددا غير جذرى أو عددا تخيليا ، ونحن لا ننصح بهذه الطريقة .

ونحصل على وفرة الجهد الكبير ، فى هذه الحالة ، باستعمال طريقة التجزئة لأن العلاقة (7.5) تختصر بالشكل :

$$\begin{aligned} B_{11} &= A_{11}^{-1} + (A_{11}^{-1}A_{12})\xi^{-1}(A_{11}^{-1}A_{12})', \qquad B_{21} = B_{12}' \\ B_{12} &= -(A_{11}^{-1}A_{12})\xi^{-1}, \qquad B_{22} = \xi^{-1} \end{aligned} \tag{7.6}$$

حيث

$$\xi = A_{22} - A_{21}(A_{11}^{-1}A_{12}).$$

انظر المسالة ٧

إذا كانت المصفوفة A غير متماثلة فإنه يمكن استعمال الطريقة الواردة أعلاه لإيجاد معكوس المصفوفة $A'A$ والتى تكون مصفوفة متماثلة واستنتاج مقلوب A من العلاقة .

$$A^{-1} = (A'A)^{-1}A' \tag{7.7}$$

مســـائل محلولة

١ – أثبت أن مصفوفة مربعة A من الدرجة n يكون لها معكوس فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) غير شاذة .

لنفرض أن A غير شاذة ، من النظرية IV من الفصل الخامس ، توجد مصفوفتان غير شاذتين P و Q بحيث يكون $PAQ = I$ ونجد عندها أن $A = P^{-1} \cdot Q^{-1}$ وأن $A^{-1} = Q \cdot P$ موجودة .

لنفرض أن A^{-1} موجودة . إن هذا يؤدي إلى أن المصفوفة $A \cdot A^{-1} = I$ من الرتبة n إذا كانت A مصفوفة شاذة فإن رتبة AA^{-1} ستكون أصغر من n أي أن A لا يمكن أن تكون شاذة .

٢ – (أ) إذا كان $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ فإن $|A| = 5$ ، $\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ، $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$.

(ب) إذا كان $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ فإن $|A| = 18$ ، $\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ ، $A^{-1} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$.

٣ – احسب معكوس المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 14 & 14 \end{bmatrix}$.

$$[A\ I_4] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 14 & 14 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 14 & 14 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1 & -3/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & 10 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1 & -3/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & 10 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 7/2 & 11 & 5/2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & -5 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 18 & 13 & -7 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 18 & 13 & -7 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 3/5 & 1/5 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -23 & 29 & -64/5 & -18/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 10 & -12 & 26/5 & 7/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 6/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 3/5 & 1/5 \end{array}\right] = [I_4\ A^{-1}]$$

ونجد أخيرا معكوس المصفوفة :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -23 & 29 & -64/5 & -18/5 \\ 10 & -12 & 26/5 & 7/5 \\ 1 & -2 & 6/5 & 2/5 \\ 2 & -2 & 3/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

٤ – حل مجموعة المعادلات التالية

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = I & \text{(iii)} \quad B_{21}A_{11} + B_{22}A_{21} = 0 \\ \text{(ii)} \quad A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = 0 & \text{(iv)} \quad B_{21}A_{12} + B_{22}A_{22} = I \end{cases}$$

بالنسبة لـ B_{11} ، B_{12} ، B_{21} و B_{22}

لنفرض $B_{22} = \xi^{-1}$. فنجد من العلاقة (ii) أن $B_{12} = -(A_{11}^{-1}A_{12})\xi^{-1}$; ومن العلاقة (iii) أن $B_{21} = -\xi^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1})$;

ومن العلاقة (i) أن $B_{11} = A_{11}^{-1} - A_{11}^{-1}A_{12}B_{21} = A_{11}^{-1} + (A_{11}^{-1}A_{12})\xi^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1})$.

وأخيرا ، بالتعويض فى العلاقة (iv) نجد :

$$-\xi^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1})A_{12} + \xi^{-1}A_{22} = I \quad \text{و} \quad \xi = A_{22} - (A_{21}A_{11}^{-1})A_{12}$$

٥ – أوجد معكوس المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ بطريقة التجزئة

(أ) لنأخذ المصفوفة $G_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ ولنجزئها بالطريقة التالية :

$$A_{21} = [2\ \ 4], \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ و } A_{22} = [3]$$

ولكن :

$$A_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{11}^{-1}A_{12} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_{21}A_{11}^{-1} = [2\ \ 4]\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = [2\ \ 0]$$

ومن ثم

$$\xi = A_{22} - A_{21}(A_{11}^{-1}A_{12}) = [3] - [2\ \ 4]\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = [-3], \text{ و } \xi^{-1} = [-1/3]$$

$$B_{11} = A_{11}^{-1} + (A_{11}^{-1}A_{12})\xi^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1}) = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}\left[-\frac{1}{3}\right][2\ \ 0] = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B_{12} = -(A_{11}^{-1}A_{12})\xi^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_{21} = -\xi^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1}) = \frac{1}{3}[2\ \ 0], \quad B_{22} = \xi^{-1} = \left[-\frac{1}{3}\right]$$

ونجد أخيرا :

$$G_3^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(ب) لنجزئ A بحيث يكون $A_{21} = [1\ \ 1\ \ 1]$, $A_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ و $A_{22} = [1]$.

ونجد فى هذه الحالة

$$A_{11}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{11}^{-1}A_{12} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad A_{21}A_{11}^{-1} = \frac{1}{3}[2\ \ -3\ \ 2].$$

$$\xi = [1] - [1\ \ 1\ \ 1]\left(\frac{1}{3}\right)\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \left[\frac{1}{3}\right] \text{ و } \xi^{-1} = [3]$$

وينتج عن ذلك أن

$$B_{11} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}[3]\frac{1}{3}[2 \ -3 \ 2] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & -9 & 6 \\ -2 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$B_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_{21} = [-2 \ 3 \ -2], \quad B_{22} = [3]$$

ونجد أخيرا

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

٦ – أوجد معكوس المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ بطريقة التجزئة .

لا يمكننا أن نأخذ $A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ لأنها مصفوفة شاذة

من المثال ٣ يكون معكوس $H_{23}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = B$ هو $B^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ وينتج عن هذا أن

$$A^{-1} = B^{-1}H_{23} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

وعلى ذلك إذا كان المصغر المربع A_{11} ذو الدرجة $(n-1)$ للمصفوفة غير الشاذة المربعة A ذات الدرجة n شاذا فإننا نشكل ، أولا ، مصفوفة غير شاذة مربعة ومن الدرجة $(n-1)$ واقعة فى الزاوية العلوية اليسرى منه لكى نحصل على المصفوفة B ثم نوجد معكوس المصفوفة B ومن ثم بإجراء تحويل مناسب على B^{-1} نحصل على A^{-1}

٧ – احسب معكوس المصفوفة المتماثلة $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$.

لننظر أولا فى المصفوفة الجزئية $G_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ولنجزئها بالشكل :

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = [-1 \ 2], \quad A_{22} = [1]$$

فنجد

$$A_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix}, \quad A_{11}^{-1}A_{12} = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\xi = A_{22} - A_{21}(A_{11}^{-1}A_{12}) = [1] - [-1 \ 2]\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = [-2].$$

و $\xi^{-1} = [-\frac{1}{2}]$

ومن ثم

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} [-\tfrac{1}{2}] [-1 \;\; 1] = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix},$$

$$B_{12} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad B_{21} = [-\tfrac{1}{2} \;\; \tfrac{1}{2}], \quad B_{22} = [-\tfrac{1}{2}]$$

و

$$G_3^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & 5 \\ -5 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

اعتبر الآن المصفوفة A مجزأة كما يلي :

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = [2 \;\; -3 \;\; -1], \quad A_{22} = [4]$$

فنجد عندها

$$A_{11}^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & 5 \\ -5 & 5 & -5 \end{bmatrix}, \quad A_{11}^{-1}A_{12} = \begin{bmatrix} -1/5 \\ 2/5 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \xi = [18/5], \quad \xi^{-1} = [5/18]$$

ومن ثم

$$B_{11} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 2 & 5 & -7 \\ 5 & -1 & 5 \\ -7 & 5 & 11 \end{bmatrix}, \quad B_{12} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad B_{21} = \frac{1}{18}[1 \;\; -2 \;\; 10], \quad B_{22} = [5/18]$$

ويكون أخيرا :

$$A^{-1} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 2 & 5 & -7 & 1 \\ 5 & -1 & 5 & -2 \\ -7 & 5 & 11 & 10 \\ 1 & -2 & 10 & 5 \end{bmatrix}.$$

مسائل إضافية

٨ – أوجد المصفوفة المرافقة ومعكوساً لكل من المصفوفات :

(أ) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, (ب) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

الجواب : المعكوسات : (أ) $\frac{1}{14}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 5 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$, (ب) $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -10 & 4 & 9 \\ 15 & -4 & -14 \\ -5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, (د) $\begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$

٩ – أوجد معكوس المصفوفة (د) الواردة فى المسألة ٨ كمجموع مباشر .

١٠ – أوجد معكوس كل من المصفوفات الواردة فى المسألة ٨ مستعملا طريقة المسألة ٣ .

١١ – السؤال السابق نفسه إذا كانت المصفوفات هى :

(ا) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 5 & -5 \\ 3 & -4 & -5 & 8 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 3 & 9 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & 2 \\ 4 & 12 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

الأجوبة : (ا) $\frac{1}{18}\begin{bmatrix} 2 & 16 & -6 & 4 \\ 22 & 41 & -30 & -1 \\ -10 & -44 & 30 & -2 \\ 4 & -13 & 6 & -1 \end{bmatrix}$ (ب) $\frac{1}{48}\begin{bmatrix} -144 & 36 & 60 & 21 \\ 48 & -20 & -12 & -5 \\ 48 & -4 & -12 & -13 \\ 0 & 12 & -12 & 3 \end{bmatrix}$

(جـ) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 11 & 7 & -26 \\ -1 & -7 & -3 & 16 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ (د) $(d)\ \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 30 & -20 & -15 & 25 & -5 \\ 30 & -11 & -18 & 7 & -8 \\ -30 & 12 & 21 & -9 & 6 \\ -15 & 12 & 6 & -9 & 6 \\ 15 & -7 & -6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

١٢ – استخدم نتائج المثال ٤ لإيجاد معكوس المصفوفة (د) الواردة فى المسألة (١١) بطريقة التجزئة .

١٣ – احسب بطريقة التجزئة معكوس كل من المصفوفتين (ا) و (ب) من المسألة ٨ والمصفوفات من (ا) إلى (جـ) من المسألة ١١ .

١٤ – احسب بطريقة التجزئة ، معكوس كل من المصفوفات المتماثلة ا – $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ ، ب – $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

الجواب ا – $-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -5 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ ب – $\begin{bmatrix} -3 & 3 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

١٥ – أثبت أنه إذا كانت A مصفوفة غير شاذة فإن $AB = AC$ يستلزم $B = C$

١٦ – برهن أنه إذا كانت المصفوفتان غير الشاذتين A و B تبديليتين فإن المصفوفات (ا) A^{-1} و B ، (ب) A و B^{-1} ، (جـ) A^{-1} و B^{-1} تكون تبادلية

إرشاد : (ا) $A^{-1}(AB)A^{-1} = A^{-1}(BA)A^{-1}$.

١٧ – برهن أنه إذا كانت المصفوفة غير الشاذة A متماثلة فإن A^{-1} تكون متماثلة أيضا .

إرشاد : $A^{-1}A = I = (AA^{-1})' = (A^{-1})'A$.

١٨ – برهن أنه إذا كانت المصفوفتان غير الشاذتين المتماثلتين A و B تبادليتين ، فإن (ا) $A^{-1}B$ ، (ب) AB^{-1} و (جـ) $A^{-1}B^{-1}$ تكون متماثلة .

إرشاد (ا) $(A^{-1}B)' = (BA^{-1})' = (A^{-1})'B' = A^{-1}B$.

١٩ – نقول إن المصفوفة A ذات الدرجة $m \times n$ لها معكوس من اليمين B فيما إذا كان $AB = I$ كما نقول إن لها معكوساً من اليسار C فيما إذا كان $CA = I$.

برهن أنه يكون للمصفوفة A معكوس من اليمين فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) A من الرتبة m ويكون لها معكوس من اليسار وفيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) من الرتبة n .

٢٠ – أوجد معكوساً من اليمين للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ فيما إذا كان موجودا .

إرشاد : إن رتبة A تساوي 3 وإن المصفوفة الجزئية $S = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ غير شاذة ولها معكوس S^{-1} إن المعكوس من اليمين للمصفوفة A هو المصفوفة $B = \begin{bmatrix} S^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 17 & -9 & -5 \\ -4 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ من الدرجة 4×3 .

٢١ – برهن أن المصفوفة الجزئية $T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ للمصفوفة A في المسألة ٢٠ ، غير شاذة واستنتج أن $\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ معكوس آخر من اليمين للمصفوفة A .

٢٢ – احصل على $\begin{bmatrix} 7 & -1 & -1 & a \\ -3 & 1 & 0 & b \\ -3 & 0 & 1 & c \end{bmatrix}$ كمعكوس من اليسار للمصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ حيث a, b, c اختيارية .

٢٣ – برهن أنه ليس للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ معكوس من اليمين ولا معكوس من اليسار .

٢٤ – برهن أنه إذا كان $|A_{11}| \neq 0$ فإن $\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = |A_{11}| \cdot |A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|$

٢٥ – إذا كان $|I + A| \neq 0$ فإن $(I + A)^{-1}$ و $(I - A)$ تبديليتان .

٢٦ – برهن العلاقة (i) من المسألة ٢٣ في الفصل السادس .

الفصل الثامن

الحقــول (المجــالات)

الحقــول العدديــة (مجالات الأعــداد) :

إن أى تجمع أو مجموعة S من الأعداد الحقيقية أو المركبة ، تحوى الصفر وعناصر أخرى تدعى حقلا عدديا إذا كان إجراء عمليات جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة (باستثناء القسمة على الصفر) أى زوج من الأعداد ، يعطى أحد أعداد المجموعة S .

امثلة من الحقــول العددية :

(ا) مجموعة كل الأعداد الجذرية .

(ب) مجموعة كل الأعداد الحقيقية

(جـ) مجموعة كل الأعداد التى من الشكل $a + b\sqrt{3}$ حيث a و b عددان جذريان .

(د) مجموعة كل الأعداد المركبة $a + bi$ حيث a و b عددان حقيقيان .

أما مجموعة الأعداد الصحيحة ومجموعة الأعداد التى تكتب بالشكل $b\sqrt{3}$ حيث b عدد جذرى فليسا حقلين عدديين

الحقــل :

بصورة عامة يسمى أى تجمع أو مجموعة S مكونة من عنصرين أو أكثر ومزودة بعمليتين تدعى أولاهما جمعا (+) وتدعى الثانية منهما ضربا (.) ، إنها حقل F فيما إذا تحققت الشروط التالية ($a, b, c, \ldots$ ، عناصر من F أى مقادير عددية) .

ج ١ : $a + b$ عنصر وحيد من F

ج ٢ : $a + b = b + a$

ج ٣ : $a + (b + c) = (a+b) + c$

ج ٤ : يوجد لكل عنصر من F عنصر 0 من F يحقق العلاقة $a + 0 = 0 + a = a$

ج ٥ : يوجد لكل عنصر a من F عنصر وحيد $-a$ من F يحقق العلاقة $a + (-a) = 0$

ض ١ : $ab = a.b$ عنصر وحيد من F

ض ٢ : $ab = ba$

ض ٣ : $(ab)c = a(bc)$

ض ٤ : يوجد لكل عنصر a من F عنصر وحيد $1 \neq 0$ من F يحقق العلاقة $1.a = a.1 = a$

ض ٥ : يوجد لكل عنصر $a \neq 0$ من F ، عنصر وحيد a^{-1} فى F نفسها ويحقق العلاقة $a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$

ت ١ : $a(b + c) = ab + ac$

ت ٢ : $(a + b)c = ac + bc$

بالإضافة إلى حقول الأعداد الواردة أعلاه ، يمكن إعطاء أمثلة أخرى من الحقول :

(هـ) مجموعة خوارج القسمة $\frac{P(x)}{Q(x)}$ حيث $P(x)$ و $Q(x)$ كثيرات حدود فى المتغير x وذات معاملات حقيقية .

(و) مجموعة المصفوفات ذات الدرجة 2×2 وذات الشكل $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ حيث a و b عددان حقيقيان .

(ر) المجموعة التى تتحقق فيها العلاقة $a+a=0$ يقال عن هذا الحقل إنه ذو مميز يساوى 2 وسنستبعده من الآن فصاعداً . فى مثل هذا الحقل نجد ، مثلا ، أن برهان الخاصية المعروفة التى تقول إن كل محددة تحوى صفين متطابقين تساوى الصفر ، لا يبقى قائما فإذا بادلنا بين الصفين المتطابقين فى المحددة فإننا نجد $D=-D$ أو $2D=0$ ولكن D ليس ، بالضرورة ، صفرا .

الحقول الجزئيـــة :

إذا كانت S و T مجموعتين وإذا كان كل عنصر من S عنصر من T فإننا نقول إن S **مجموعة جزئية من T** .

إذا كان S و T حقلين وإذا كانت S مجموعة جزئية من T فإن S تدعى **حقلا جزئيا من T** . فمثلا إن حقل الأعداد الحقيقية هو حقل جزئى من حقل الأعداد المركبة ، إن حقل الأعداد الجذرية هو حقل جزئى من حقل كل الأعداد الحقيقية ومن حقل كل الأعداد المركبة .

المصفوفات المعرفة على حقل :

إذا انتمت كل عناصر مصفوفة A إلى حقل F فإننا نقول إن « **A معرفة على F** » فمثلا .

إن $A=\begin{bmatrix}1 & 1/2\\ 1/4 & 2/3\end{bmatrix}$ مصفوفة معرفة على حقل الأعداد الجذرية وإن $B=\begin{bmatrix}1 & 1+i\\ 2 & 1-3i\end{bmatrix}$ مصفوفة معرفة على حقل الأعداد المركبة . إن A هنا مصفوفة معرفة على حقل الأعداد الحقيقية بينما B ليست كذلك ويمكننا ان نعتبر أيضا ، A معرفة على حقل الأعداد المركبة .

لتكن $A,B,C,...$ مصفوفات معرفة على نفس الحقل F ولنفرض أن F أصغر حقل يحوى كل عناصر هذه المصفوفات ، أى أنه لو فرضنا أن كل هذه العناصر أعداد جذرية فإن الحقل F يكون حقل الأعداد الجذرية وليس حقل الأعداد الحقيقية ولا حقل الأعداد المركبة . لو تفحصنا مختلف العمليات التى تعرف على هذه المصفوفات منفردة أو مجتمعة والواردة فى الفصول السابقة ، لوجدنا أننا لا نحتاج لأى عناصر غير منتمية إلى F مثال ذلك :

إن مجموع وحاصل ضرب مصفوفات معرفة على F هى مصفوفات معرفة على F .

إذا كانت A غير شاذة فإن معكوسها معرف على F .

إذا كان $A\sim I$ ، فإنه توجد مصفوفتان P و Q معرفتان على F بحيث يكون $PAQ=I$ و I مصفوفة معرفة على F

إذا كانت A مصفوفة معرفة على حقل الأعداد الجذرية وكانت رتبتها r فإن رتبتها لا تتغير فيما إذا اعتبرت معرفة على حقل الأعداد الحقيقية أو حقل الأعداد المركبة .

سنعتبر بعدما تقدم وعندما نقول إن المصفوفة A معرفة على F أن F أصغر حقل يحوى عناصر A .

سيكون من الضرورى فى الفصول القادمة وضمن بعض الحالات ، أن نقصر الحقل على حقل الأعداد الحقيقية . وفى حالات أخرى سيحدد حقل عناصر المصفوفات مثلا من حقل الأعداد الجذرية إلى حقل الأعداد الحقيقية . وفى بعض الأحيان لا تؤدى العبارة « A معرفة على F » إلى أى قصر على الحقل باستثناء الحقل المستبعد ذى المميز المساوى 2 .

مســـائل محلولة

١ – برهن أن مجموعة كل الأعداد المركبة تكون حقلا .

يمكننا التحقق من ذلك بمراجعة الخواص ج ١ – ج ٥ ، ض ١ – ض ٥ ، ت ١ – ت ٢ . إن العنصر المعدوم (ج ٤) هو الصفر وعنصر الوحدة (ض ٤) هو الواحد . إذا كان $a+bi$ و $c+bi$ عنصرين من المجموعة المفروضة فإن سالب (ج ٥) للعدد $a+bi$ هو $-a-bi$ وإن حاصل الضرب (ض١) هو $(a+bi)(c+di)=(ac+bd)+(ad+bc)$

وإن المعكوس (ض ٥) للعدد $a+di\neq 0$ هو :

$$\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{bi}{a^2+b^2}$$

إن التحقق من صحة بقية الخواص متروك كتمرين للقارئ .

مســـــائل اضــــافية

٢ – تحقق من أن (ا) مجموعة كل الأعداد الحقيقية ذات الشكل $a + b\sqrt{5}$ حيث a و b عددان جذريان و

(ب) مجموعة كل خوارج القسمة $\frac{P(x)}{Q(x)}$ حيث $P(x)$ و $Q(x)$ كثيرا حدود فى المتغير x معاملاتها أعداد حقيقية ، تكونان حقلين ؛

٣ – برهن أن (ا) مجموعة كل الأعداد الجذرية

(ب) مجموعة كل الأعداد ذات الشكل $a+b\sqrt{3}$ حيث a و b عددان جذريان و

(ج) مجموعة كل الأعداد ذات الشكل $a + bi$ حيث a و b عددان جذريان ، هى حقول جزئية من حقل الأعداد المركبة .

٤ – برهن ان مجموعة كل المصفوفات ذات الدرجة 2×2 والشكل $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$، حيث a و b عددان جذريان، تكون حقلا

برهن أن هذا هو حقل جزئى من حقل المصفوفات ذات الدرجة 2×2 والشكل $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ حيث a و b عددان حقيقيان .

٥ – لماذا لا يمكن اعتبار مجموعة كل المصفوفات ذات الدرجة 2×2 والتى تكون عناصرها أعداد حقيقية ، حقلا ؟

٦ – إذا حققت مجموعة R عناصرها $a, b, c,...$ الخواص (ج ١ ، ج ٢ ، ج ٣ ، ج ٤ ، ج ٥ ، ض ١ ، ض ٢ ، ض ٣ ، ت ١ ، ت ٢) الواردة سابقا فإنها تدعى **حلقة** ولكى نؤكد على أن الضرب المعرف على هذه المجموعة ، غير تبديلى فإننا نصف هذه **الحلقة** بأنها **غير تبديلية** وعندما تحقق الحلقة R الخاصية ض ٢ فإنها توصف بكونها **تبديلية** وإذا حققت الحلقة R الخاصية ض ٤ فإنها تدعى حلقة **ذات عنصر وحده**

تحقق مما يلى :

(ا) أن مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية $0, \pm 2, \pm 4,....$ هى مثال لحلقة تبديلية لا تحوى عنصر الوحدة .

(ب) أن مجموعة كل الأعداد الصحيحة $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3,...$ هى مثال لحلقة تبديلية ذات عنصر الوحدة .

(ج) أن مجموعة كل المصفوفات ذات الدرجة n والمعرفة على F مثال لحلقة غير تبديلية ذات عنصر الوحدة .

(د) إن مجموعة كل المصفوفات ذات الدرجة 2×2 والشكل $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$، حيث a و b عددان حقيقيان هى مثال لحلقة تبديلية ذات عنصر وحدة .

٧ – هل يمكن تحويل المجموعة (ا) الواردة فى المسألة ٦ إلى حلقة تبديلية ذات عنصر وحدة وذلك بإضافة العنصرين ± 1 إلى هذه المجموعة ؟

٨ – استنادا إلى المسألة ٤ تكون المجموعة (د) الواردة فى المسألة ٦ حقلا . هل كل حقل حلقة ؟ هل كل حلقة تبديلية ذات عنصر وحدة حقل ؟

٩ – صف حلقة كل المصفوفات ذات الدرجة 2×2 والشكل $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix}$، حيث a و b عنصران من F. إذا كانت A مصفوفة ما من هذه الحلقة وكان $L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$، فبرهن أن $LA = A$ تسمى L عنصر وحدة من اليسار . هل يوجد عنصر وحدة من اليمين؟

١٠ – ليكن C حقل الأعداد المركبة $p + qi$ و K حقل المصفوفات ذات الدرجة والشكل $\begin{bmatrix} u & -v \\ v & u \end{bmatrix}$ حيث p, q, u, v أعداد حقيقية . لنعتبر العدد المركب $a+bi$ والمصفوفة $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ كعنصرين متناظرين من هاتين المجموعتين ولنسم كلا منهما خيالا للآخر .

(ا) اكتب خيال كل من : $3 + 2i,\ 5.$; $\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

(ب) برهن أن خيال مجموع (حاصل ضرب) عنصرين من K هو مجموع (حاصل ضرب) خياليهما من C

(ج) برهن أن خيال عنصر الوحدة من K عنصر الوحدة من C

(د) ما هو خيال المرافق للعدد $a + bi$ ؟

(هـ) ما هو الخيال لمعكوس المصفوفة $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ ؟

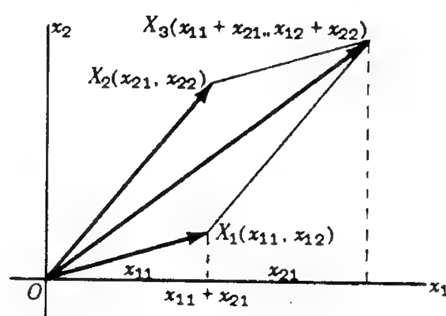
إن هذا مثال **للتشاكل** (الايزومورفيزم) بين مجموعتين .

الفصل التاسع

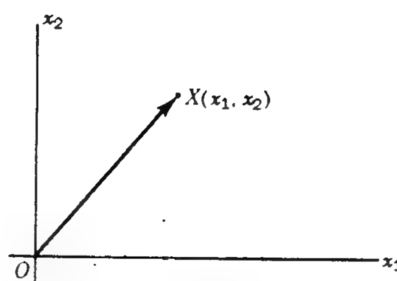
الارتباط الخطى للمتجهات والصيغ

الزوج المرتب :

يستعمل الزوج المرتب من الأعداد الحقيقية (x_1,x_2) للتعبير عن نقطة X فى مستوى وسنستعمل هنا ، هذا الزوج المرتب نفسه ونكتبه بالشكل $[x_1,x_2]$ للدلالة على المتجه ذى البعدين $0X$ (انظر الشكل ٩ – ١)



شكل ٩ – ٢



شكل ٩ – ١

إذا كان $X_1 = [x_{11},x_{12}]$ و $X_2 = [x_{21},x_{22}]$ متجهين مختلفين فإن مجموعهما الذى يتعين بحسب قانون متوازى الأضلاع (انظر الشكل ٩ – ٢) يكون :

$$X_3 = X_1 + X_2 = [x_{11} + x_{21}, x_{12} + x_{22}]$$

وإذا عاملنا X_1 , X_2 كمصفوفتين من الدرجة 2×1 فإننا نلاحظ أن ما سبق يمثل قاعدة جمع المصفوفات الواردة فى الفصل الأول . وإذا كان فوق ذلك k عدد ما فإن :

$$kX_1 = [kx_{11}, kx_{12}]$$

هو حاصل الضرب المعتاد للمتجهات بعدد فى علم الفيزياء .

المتجهـــــــات :

نعنى بمتجه ذى n بعدا على F ، مجموعة مرتبة مكونة من n عنصرا x_i من F ، مثل :

$$X = [x_1, x_2, \dots, x_n] \tag{9.1}$$

تسمى العناصر $x_1,x_2,\dots,x_n$ على الترتيب من الشمال لليمين المركبة الأولى ، الثانية .. للمتجه X .

سنرى فيما بعد أنه من الأفضل أن نكتب مركبات متجه على صورة عمود ، مثل :

$$X = [x_1, x_2, \dots, x_n]' = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \tag{9.1'}$$

ومع أن كلا من (9.1)،(ˊ9.1) تعبر عن نفس المتجه إلا أننا نقول، عن (9.1) إنه متجه صفا وعن (ˊ9.1) إنه متجه عمودى، ويمكننا عندئذ أن نعتبر المصفوفة A ذات الدرجة $p\times q$ كتعبير عن p متجها صفا (عناصر أى صف من صفوفها مركبات متجه ذى q بعدا) أو كتعبير عن q متجها عمودا .

يسمى المتجه الذى يكون كل عنصر من عناصره صفرا ، **بالمتجه الصفرى**، ويرمز له بالرمز O .

إن مجموع وحاصل طرح متجهين صفين (عمودين) وحاصل ضرب عدد بمتجه تخضع تماما لقواعد هذه العمليات فى المصفوفات .

مثال ١ :

اعتبر المتجهات ذات الأبعاد الثلاثة :

$$X_1 = [3, 1, -4],\quad X_2 = [2, 2, -3],\quad X_3 = [0, -4, 1],\quad \text{و}\quad X_4 = [-4, -4, 6]$$

تحقق العلاقات التالية

(ا) $2X_1 - 5X_2 = 2[3, 1, -4] - 5[2, 2, -3] = [6, 2, -8] - [10, 10, -15] = [-4, -8, 7]$

(ب) $2X_2 + X_4 = 2[2, 2, -3] + [-4, -4, 6] = [0, 0, 0] = 0$

(جـ) $2X_1 - 3X_2 - X_3 = 0$

(د) $2X_1 - X_2 - X_3 + X_4 = 0$

إن المتجهات المستعملة هنا هى متجهات صفوف ومن السهل أن نلاحظ أنه لو مثل كل قوس من الأقواس السابقة متجها عمودا ، فإن النتائج السابقة تبقى صحيحة .

الارتباط الخطى للمتجهات :

إن مجموعة المتجهات والتى عددها m ذات الـ n مركبة المعرفة على F

$$\begin{aligned} X_1 &= [x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}] \\ X_2 &= [x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_m &= [x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn}] \end{aligned} \qquad (9.2)$$

تسمى **مرتبطة خطياً** على F فيما إذا وجد m عنصرا $k_1, k_2, \ldots, k_m$ من F ليست كلها أصفارا وتحقق العلاقة :

$$k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_mX_m = 0 \qquad (9.3)$$

أما إذا لم يتحقق 9.3 فإنه يقال بأن مجموعة المتجهات **مستقلة خطيا** .

مثال ٢ :

اعتبر المتجهات الأربعة الواردة فى المثال ١ . من (ب) يتضح أن المتجهين X_2 ، X_4 مرتبطين خطيا وكذلك المتجهات X_1 ، X_2 و X_3 مرتبطة خطيا كما يتضح من (جـ) وأن المجموعة كلها مرتبطة خطيا كما هو واضح من (د)

ومن جهة ثانية نجد أن المتجهين X_1 و X_2 مستقلان خطيا إذ أنه لو فرضنا العكس لوجب أن يكون

$$k_1X_1 + k_2X_2 = [3k_1 + 2k_2, k_1 + 2k_2, -4k_1 - 3k_2] = [0, 0, 0]$$

أى : $3k_1 + 2k_2 = 0$ ، $k_1 + 2k_2 = 0$ و $-4k_1 - 3k_2 = 0$

ينتج عن العلاقتين الأوليتين أن $k_1 = 0$ ثم نجد أن $k_2 = 0$

أى متجه X ذا n مركبة (بعدا) مرتبط خطيا مع المتجه الصفرى ذى n بعدا .

نقول عن المتجه X_{m+1} إنه **قابل للتمثيل كائتلاف خطى للمتجهات** $X_1, X_2, \ldots, X_m$ فيما إذا وجدت عناصر $k_1, k_2, \ldots, k_m$ من F بحيث يتحقق :

$$X_{m+1} = k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_mX_m .$$

نظريــات اســاسية :

فى (9.3) إذا كان $k_i \neq 0$ فإنه يمكن الحل بالنسبة لـ

$$X_i = -\frac{1}{k_i}\{k_1 X_1 + \cdots + k_{i-1} X_{i-1} + k_{i+1} X_{i+1} + \cdots + k_m X_m\}$$

أو

$$X_i = s_1 X_1 + \cdots + s_{i-1} X_{i-1} + s_{i+1} X_{i+1} + \cdots + s_m X_m \qquad (9.4)$$

وعلى ذلك

I. إذا كان هناك m متجها مرتبطة خطيا فإنه يمكن دائما التعبير عن أحدها كائتلاف (تركيب) خطى من المتجهات الأخرى .

II. إذا كانت m متجها $X_1, X_2, \ldots, X_m$ مستقلة خطيا بينما تكون المجموعة ، التى نحصل عليها ، بإضافة متجه آخر X_{m+1} إلى المجموعة السابقة ، مرتبطة خطيا . فإنه يمكن التعبير **عن** X_{m+1} بائتلاف خطى المتجهات $X_1, X_2, \ldots, X_m$.

مثــال ٣ :

من المثال ٢ يتضح أن المتجهين X_1, X_2 مستقلان خطيا بينما X_1 ، X_2, X_3 مرتبطة خطيا وهى تحقق العلاقة $2X_1 - 3X_2 - X_3 = 0$ ومن الواضح أن : $X_3 = 2X_1 - 3X_2$.

III. إذا وجد بين الـ m متجها $X_1, X_2, \ldots, X_m$ مجموعة جزئية مكونة من $m>r$ متجها مرتبطة خطيا ، فإن المجموعة كاملة تكون مرتبطة خطيا .

مثال ٤ :

ينتج من (ب) من المثال ١ أن المتجهين X_2, X_4 مرتبطان خطيا وينتج عن (د) أن مجموعة المتجهات الأربعة مرتبطة خطيا .

انظر المسألة ١

IV. إذا كانت رتبة المصفوفة A حيث

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} \qquad (9.5)$$

المصاحبة للمتجهات (9.2) التى عددها m مساوية r ، $m > r$ ، فإنه يوجد على الضبط r متجها ، من هذه المجموعة ، مستقلة خطيا ، ويمكن تمثيل كل متجه من المتجهات المتبقية والتى عددها $(m-r)$ بائتلاف خطى للمتجهات r المذكورة .

انظر المسألتين ٢ – ٣

V. إن الشرط اللازم والكافى لكى تكون المتجهات (9.2) مرتبطة خطيا هو أن تكون رتبة مصفوفة المتجهات (9.5) هى $m>r$ إذا كانت الرتبة تساوى m فإن المتجهات المذكورة تكون مستقلة خطيا .

إن مجموعة المتجهات (9.2) مرتبطة خطيا ، بالضرورة ، فى الحالة التى يكون فيها $n<m$.

إذا كانت مجموعة المتجهات (9.2) مستقلة خطيا فإن كل مجموعة جزئية منها تكون كذلك .

الصيغة (الصورة) الخطية :

إن الصيغة الخطية على F فى n متغير $x_1, x_2, \ldots, x_n$ هو كثير حدود من النوع

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n \qquad (9.6)$$

حيث معاملات كثيرة الحدود عناصر من F .

اعتبر مجموعة مكونة من m من الصيغ الخطية فى n متغيرا

$$\begin{cases} f_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ f_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases} \qquad (9.7)$$

والمصفوفة المصاحبة

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

إذا وجدت عناصر مثل $k_1, k_2, \ldots, k_m$ من F وليست كلها أصفارا بحيث يكون

$$k_1 f_1 + k_2 f_2 + \ldots + k_m f_m = 0$$

فإننا نصف الصيغ (9.7) بأنها **مرتبطة خطيا** وإذا لم تحقق هذه الشروط فإنها تكون **مستقلة خطيا** . أى أن الارتباط الخطى أو الاستقلال الخطى للصيغ (9.7) يكافىء الارتباط الخطى أو الاستقلال الخطى لمتجهات صفوف A .

مثال ٥ :

إن الصيغ $f_1 = 2x_1 - x_2 + 3x_3, \; f_2 = x_1 + 2x_2 + 4x_3, \; f_3 = 4x_1 - 7x_2 + x_3$ مرتبطة خطيا لأن رتبة المصفوفة

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 4 & -7 & 1 \end{bmatrix}$ تساوى 2 وفى هذه الحالة $3f_1 - 2f_2 - f_3 = 0$.

إن المجموعة (9.7) مرتبطة خطيا بالضرورة ، فيما إذا كان $m > n$ لماذا ؟

مســـائل محلولة

١- برهن أنه إذا وجد من بين المتجهات $X_1, X_2, \ldots, X_m$ والتى عددها m متجها مجموعة جزئية ولتكن $X_1, X_2, \ldots, X_r$ حيث $r < m$ مرتبطة خطيا فإن مجموعة الـ m متجها تكون مرتبطة خطيا .

بما أننا فرضنا أن $k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_rX_r = 0$ تتحقق لبعض قيم k الغير متلاشية فإنه يكون :

$$k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_rX_r + 0 \cdot X_{r+1} + \cdots + 0 \cdot X_m = 0$$

حيث لا تنعدم كل المعاملات k وهذا يعنى أن مجموعة المتجهات كلها مرتبطة خطيا .

٢ - أثبت أنه إذا كانت رتبة مصفوفة مصاحبة لمجموعة متجهات عددها m ذات n بعدا ، هى r حيث $m > r$ فإنه يوجد على الضبط فى هذه المجموعة r متجها مستقلة خطيا وأنه يمكن التعبير عن الـ $(m-r)$ متجها الباقية بتراكيب (ائتلاف) خطية لمجموعة الـ r متجها المذكورة .

لتكن (9.5) المصفوفة المصاحبة ولنفرض أولا أن $n \geq m$ إذا كان المصغر ذو الدرجة r والواقع فى الزاوية العليا واليسرى من المصفوفة المذكورة ، مساويا الصفر ، فإننا نبادل الصفوف فيما بينها والأعمدة حتى نضع فى هذا المكان مصغرا غير متلاش من الدرجة r ثم نرقم كل الأسطر والأعمدة بالترتيب الطبيعى . فنجد

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1r} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{r1} & x_{r2} & \cdots & x_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

اعتبر الآن مصغرا من الدرجة $(r+1)$ فنجد :

$$\nabla = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1r} & x_{1q} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2r} & x_{2q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{r1} & x_{r2} & \cdots & x_{rr} & x_{rq} \\ x_{p1} & x_{p2} & \cdots & x_{pr} & x_{pq} \end{vmatrix} = 0$$

حيث العناصر x_{pj}, x_{iq} . هى على الترتيب من أى صف أو أى عمود غير واقعين فى Δ لتكن $\Delta = k_{r+1}, \ldots$ $k_1, k_2,$ هى المعاملات المرافقة الخاصة بالعناصر $x_{1q}, x_{2q}, \ldots, x_{rq}, x_{pq}$ المكونة للعمود الأخير من ∇ لذلك من(10 - 3):

$$k_1x_{1i} + k_2x_{2i} + \cdots + k_rx_{ri} + k_{r+1}x_{pi} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

كذلك من الفرض

$$k_1x_{1q} + k_2x_{2q} + \cdots + k_rx_{rq} + k_{r+1}x_{pq} = \nabla = 0$$

والآن لنغير . العمود الأخير من ∇ بعمود آخر من الأعمدة الباقية وليكن العمود ذا الرقم u الذى لا يظهر فى Δ إن المعاملات المرافقة لعناصر هذا العمود هى المعاملات المرافقة k التى ذكرناها سالفا . لهذا :

$$k_1x_{1u} + k_2x_{2u} + \cdots + k_rx_{ru} + k_{r+1}x_{pu} = 0$$

لذلك

$$k_1x_{1t} + k_2x_{2t} + \cdots + k_rx_{rt} + k_{r+1}x_{pt} = 0 \qquad (t = 1, 2, \ldots, n)$$

وبالتجميع على جميع قيم t فإننا نجد :

$$k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_rX_r + k_{r+1}X_p = 0$$

وبما أن $k_{r+1} = \Delta \neq 0$. فإن X_p تركيب خطى لـ r متجها $X_1, X_2, \ldots, X_r$ المستقلة خطيا . ولكن X_p هو أى متجه من الـ $(m\text{-}r)$ متجه $X_{r+1}, X_{r+2}, \ldots, X_m$ ؛ أى أنه يمكن التعبير عن كل متجه من هذه المتجهات بتركيب خطى للمتجهات $X_1, X_2, \ldots, X_r$.

أما فى حالة $n<m$ اعتبر المصفوفة عندما نضيف لكل متجه من المتجهات الـ m عددا إضافيا من المركبات المتلاشية (الأصفار) عددها $m-n$ ولنرمز لهذه المصفوفة بالشكل $[\, A : 0 \,]$. إن من الواضح أن الارتباط الخطى والاستقلال الخطى للمتجهات ورتبة المصفوفة A لم تتغير .

وهكذا نكون قد برهنا فى أى من الحالتين أن المتجهات $X_{r+1}, \ldots, X_m$ تراكيب خطية للمتجهات $X_1, X_2, \ldots, X_r$ المستقلة خطيا .

٣ – برهن باستعمال مصفوفة ، أن كلا من مجموعتى المتجهات الثلاثية

$$(\text{ا}) \quad \begin{aligned} X_1 &= [1, 2, -3, 4] \\ X_2 &= [3, -1, 2, 1] \\ X_3 &= [1, -5, 8, -7] \end{aligned} \qquad \text{و} \qquad (\text{ب}) \quad \begin{aligned} X_1 &= [2, 3, 1, -1] \\ X_2 &= [2, 3, 1, -2] \\ X_3 &= [4, 6, 2, -3] \end{aligned}$$

مرتبطة خطياً. فى كل منها عين مجموعة جزئية عظمى من المتجهات المستقلة خطياً وعبر عن الأشكال الباقية بتراكيب خطية للأول.

(ا) إن المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 8 & -7 \end{bmatrix}$ ذات رتبة مساوية 2 أى أنه يوجد متجهان مستقلان خطيا وليكونا X_1, X_2 . إن المصغر $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$. اعتبر المصغر $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 8 \end{vmatrix}$. فنجد أن المعاملات المرافقة لعناصر العمود الأخير هى على الترتيب من الشمال لليمين 7– ,14,7 – فيكون إذن و

$$\begin{cases} f_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ f_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases} \quad (9.7)$$

والمصفوفة المصاحبة

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

إذا وجدت عناصر مثل $k_1, k_2, \ldots, k_m$ من F وليست كلها أصفارا بحيث يكون

$$k_1f_1 + k_2f_2 + \ldots + k_m f_m = 0$$

فإننا نصف الصيغ (9.7) بأنها **مرتبطة خطيا** وإذا لم تحقق هذه الشروط فإنها تكون **مستقلة خطيا** . أى أن الارتباط الخطى أو الاستقلال الخطى للصيغ (9.7) يكافئ الارتباط الخطى أو الاستقلال الخطى لمتجهات صفوف A .

مثال ٥ :

إن الصيغ $f_1 = 2x_1 - x_2 + 3x_3,\ f_2 = x_1 + 2x_2 + 4x_3,\ f_3 = 4x_1 - 7x_2 + x_3$ مرتبطة خطيا لأن رتبة المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 4 & -7 & 1 \end{bmatrix}$$

تساوى 2 وفى هذه الحالة $3f_1 - 2f_2 - f_3 = 0$.

إن المجموعة (9.7) مرتبطة خطيا بالضرورة ، فيما إذا كان $m > n$ لماذا ؟

مسائل محلولة

١ – برهن أنه إذا وجد من بين المتجهات $X_1, X_2, \ldots, X_m$ والتى عددها m متجها مجموعة جزئية ولتكن $X_1, X_2, \ldots, X_r$ حيث $m > r$ مرتبطة خطيا فإن مجموعة الـ m متجها تكون مرتبطة خطيا .

بما أننا فرضنا أن $k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_rX_r = 0$ تتحقق لبعض قيم k الغير متلاشية فإنه يكون :

$$k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_rX_r + 0 \cdot X_{r+1} + \cdots + 0 \cdot X_m = 0$$

حيث لا تنعدم كل المعاملات k وهذا يعنى أن مجموعة المتجهات كلها مرتبطة خطيا .

٢ – أثبت أنه إذا كانت رتبة مصفوفة مصاحبة لمجموعة متجهات عددها m ذات n بعدا ، هى r حيث $m > r$ فإنه يوجد على الضبط فى هذه المجموعة r متجها مستقلة خطيا وأنه يمكن التعبير عن الـ $(m-r)$ متجها الباقية بتراكيب (ائتلاف) خطية لمجموعة الـ r متجها المذكورة .

لتكن (9.5) المصفوفة المصاحبة ولنفرض أولا أن $n \geq m$ إذا كان المصغر ذو الدرجة r والواقع فى الزاوية العليا واليسرى من المصفوفة المذكورة ، مساويا الصفر ، فإننا نبادل الصفوف فيما بينها والأعمدة حتى نضع فى هذا المكان مصغرا غير متلاش من الدرجة r ثم نرقم كل الأسطر والأعمدة بالترتيب الطبيعى . فنجد

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1r} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{r1} & x_{r2} & \cdots & x_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

اعتبر الآن مصغرا من الدرجة $(r+1)$ فنجد :

$$\nabla = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1r} & x_{1q} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2r} & x_{2q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{r1} & x_{r2} & \cdots & x_{rr} & x_{rq} \\ x_{p1} & x_{p2} & \cdots & x_{pr} & x_{pq} \end{vmatrix} = 0$$

حيث العناصر x_{pj}, x_{iq} . هى على الترتيب من أى صف أو أى عمود غير واقعين فى Δ لتكن $k_{r+1} = \Delta \cdots k_1, k_2,$ هى المعاملات المرافقة الخاصة بالعناصر $x_{1q}, x_{2q}, \ldots, x_{rq}, x_{pq}$ المكونة للعمود الأخير من ∇ لذلك من(10 - 3):

$$k_1x_{1i} + k_2x_{2i} + \cdots + k_rx_{ri} + k_{r+1}x_{pi} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

كذلك من الفرض

$$k_1x_{1q} + k_2x_{2q} + \cdots + k_rx_{rq} + k_{r+1}x_{pq} = \nabla = 0$$

والآن لنغير ، العمود الأخير من ∇ بعمود آخر من الأعمدة الباقية وليكن العمود ذا الرقم u الذى لا يظهر فى Δ إن المعاملات المرافقة لعناصر هذا العمود هى المعاملات المرافقة k التى ذكرناها سالفا .لهذا :

$$k_1x_{1u} + k_2x_{2u} + \cdots + k_rx_{ru} + k_{r+1}x_{pu} = 0$$

لذلك

$$k_1x_{1t} + k_2x_{2t} + \cdots + k_rx_{rt} + k_{r+1}x_{pt} = 0 \qquad (t = 1, 2, \ldots, n)$$

وبالتجميع على جميع قيم t فإننا نجد :

$$k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_rX_r + k_{r+1}X_p = 0$$

وبما أن $k_{r+1} = \Delta \neq 0$، فإن X_p تركيب خطى لـ r متجها $X_1, X_2, \ldots, X_r$ المستقلة خطيا . ولكن X_p هو أى متجه من الـ $(m-r)$ متجه $X_{r+1}, X_{r+2}, \ldots, X_m$؛ أى أنه يمكن التعبير عن كل متجه من هذه المتجهات بتركيب خطى للمتجهات $X_1, X_2, \ldots, X_r$.

أما فى حالة $n<m$ اعتبر المصفوفة عندما نضيف لكل متجه من المتجهات الـ m عددا إضافيا من المركبات المتلاشية (الأصفار) عددها $m-n$ ولنرمز لهذه المصفوفة بالشكل $[A : 0]$. إن من الواضح أن الارتباط الخطى والاستقلال الخطى للمتجهات ورتبة المصفوفة A لم تتغير .

وهكذا نكون قد برهنا فى أى من الحالتين أن المتجهات $X_{r+1}, \ldots, X_m$ تراكيب خطية للمتجهات $X_1, X_2, \ldots, X_r$ المستقلة خطيا .

٣ - برهن باستعمال مصفوفة ، أن كلا من مجموعتى المتجهات الثلاثية

(أ) $X_1 = [1, 2, -3, 4]$ ، $X_2 = [3, -1, 2, 1]$ ، $X_3 = [1, -5, 8, -7]$

و (ب) $X_1 = [2, 3, 1, -1]$ ، $X_2 = [2, 3, 1, -2]$ ، $X_3 = [4, 6, 2, -3]$

مرتبطة خطياً. فى كل منها عين مجموعة جزئية عظمى من المتجهات المستقلة خطياً وعبر عن الأشكال الباقية بتراكيب خطية للأول.

(أ) إن المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 8 & -7 \end{bmatrix}$ ذات رتبة مساوية 2 أى أنه يوجد متجهان مستقلان خطيا وليكونا X_1, X_2 ، إن المصغر $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$. اعتبر المصغر $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 8 \end{vmatrix}$ فنجد أن المعاملات المرافقة لعناصر العمود الأخير هى على الترتيب من الشمال لليمين $-14, 7, -7$ فيكون إذن

و

(ب) إن رتبة المصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 4 & 6 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ مساوية 2 أى أنه يوجد متجهان مستقلان خطيا لنكن X_1 و X_2 ونجد أن

المصغر ; $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$ لنبادل بين موضعى العمودين الثانى والرابع فنجد $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ حيث $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \neq 0.$

أن المعاملات المرافقة لعناصر العمود الأخير فى $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$ هى على الترتيب من الشمال إلى اليمين $2,2,-2$ فيكون

$$2X_1 + 2X_2 - 2X_3 = 0 \quad , \quad X_3 = X_1 + X_2$$

٤ – لتكن $P_1(1,1,1)$, $P_2(1,2,3)$, $P_3(3,1,2)$, و $P_4(2,3,4)$ نقاطا من الفراغ العادى. تحدد النقطتان P_1 و P_2 مع نقطة الأصل مستويا π معادلته

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x - 2y + z = 0 \qquad \text{(i)}$$

لنعوض فى الطرف الأيسر من العلاقة (i) باحداثيات النقطة P_4 فنجد :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

أى أن P_4 واقعة فى المستوى π إن هذا يعنى أن $[P_4, P_1, P_2]' = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ من الرتبة 2 لقد تبينا أن ثلاثة نقاط من الفراغ العادى تقع فى مستوى يمر بنقطة الأصل فيما إذا كانت مصفوفة احداثياتها مع الرتبة الثانية .

برهن أن P_3 لاتقع فى المستوى π .

مسائل اضافية

٥ – برهن أنه إذا كانت الـ m متجها $X_1\ X_2,\dots, X_m$ مستقلة خطيا بينما تكون المجموعة ، التى تنتج عن هذه المتجهات ، بإضافة متجه آخر X_{m+1} مرتبطة خطيا فإنه يمكن التعبير عن X_{m+1} بتركيب خطى للمتجهات $X_1, X_2,\dots,X_m$

٦ – برهن أن تمثيل X_{m+1} الوارد فى المسألة ٥ هو تمثيل وحيد .

إرشاد : افرض $X_{m+1} = \sum_{i=1}^{m} k_i X_i = \sum_{i=1}^{n} s_i X_i$ ثم اعتبر $\sum_{i=1}^{m} (k_i - s_i) X_i.$

٧ – برهن أن الشرط اللازم والكافى لكى تكون المتجهات (9.2) مرتبطة خطيا هو أن يكون لمصفوفة هذه المتجهات (9.5) رتبة r حيث $m > r$.

إرشاد : نفرض أن الـ m متجها مرتبطة خطيا وأن (9.4) محققة . فى (9.5) لنطرح من الصف ذى الرقم i حاصل ضرب الصف الأول فى s_1 وحاصل ضرب الصف الثانى فى s_2.... كما هو موضح فى (9.4)

من أجل العكس أنظر المسألة ٢ .

٨ – افحص كل واحدة من مجموعات المتجهات التالية المعرفة على حقل الأعداد الحقيقية وذلك من حيث الارتباط والاستقلال الخطيين . وانتخب فى كل واحدة من المجموعات المرتبطة خطيا مجموعة جزئية عظمى من المتجهات المستقلة خطيا ومثل كل واحد من المتجهات الباقية بتركيب خطى للمتجهات المستقلة خطيا .

(ا) $X_1 = [2, -1, 3, 2]$, $X_2 = [1, 3, 4, 2]$, $X_3 = [3, -5, 2, 2]$

(ب) $X_1 = [1, 2, 1]$, $X_2 = [2, 1, 4]$, $X_3 = [4, 5, 6]$, $X_4 = [1, 8, -3]$

(ﺟ) $X_1 = [2, 1, 3, 2, -1]$, $X_2 = [4, 2, 1, -2, 3]$, $X_3 = [0, 0, 5, 6, -5]$, $X_4 = [6, 3, -1, -6, 7]$

الأجوبة (ا) $X_3 = 2X_1 - X_2$ (ب) $X_3 = 2X_1 + X_2$, $X_4 = 5X_1 - 2X_2$ (ﺟ) $X_3 = 2X_1 - X_2$, $X_4 = 2X_2 - X_1$

٩ – لماذا لايوجد أكثر من n متجها مستقلة خطيا فى مجموعة المتجهات ذات n مركبة على F ؟

١٠ – برهن أنه إذا كان فى (2.9) أما . $X_i = X_j$ أو $X_i = aX_j$ حيث a من F فإن مجموعة المتجهات تكون مرتبطة خطيا . هل العكس صحيح ؟

١١ – برهن أن أى متجه X ذى n مركبة مرتبط خطيا مع المتجه الصفرى ذى ال n مركبة ; أى أنه يمكن اعتبار X و 0 متناسبين .

إرشاد : اعتبر العلاقة $k_1X + k_2 \cdot 0 = 0$ حيث $k_1 = 0$ و $k_2 \neq 0$

١٢ – (ا) برهن أن : $X_1 = [1, 1+i, i]$, $X_2 = [i, -i, 1-i]$, و $X_3 = [1+2i, 1-i, 2-i]$ مرتبطة خطيا على حقل الأعداد الجذرية وبالتالى على حقل الأعداد المركبة .

(ب) برهن أن $X_1 = [1, 1+i, i]$ $X_2 = [i, -i, 1-i]$ و $X_3 = [0, 1-2i, 2-i]$ مستقلة خطيا على حقل الأعداد الحقيقية ومرتبطة على حقل الأعداد المركبة .

١٣ – افحص الارتباط والاستقلال الخطيين للصور الخطية :

(ا)
$$f_1 = 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4$$
$$f_2 = 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4$$
$$f_3 = 5x_1 - 9x_2 + 8x_3 - x_4$$

(ب)
$$f_1 = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4$$
$$f_2 = 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4$$
$$f_3 = 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4$$

الجواب (ا) $3f_1 - 2f_2 - f_3 = 0$

١٤ – ابحث فى الارتباط والاستقلال الخطيين لمجموعة كثيرات حدود :

$$P_i = a_{i0}x^n + a_{i1}x^{n-1} + \cdots + a_{in-1}x + a_{in} \quad \text{حيث} \quad (i = 1,2,\ldots,m)$$

وبرهن أن هذه المجموعة تكون مرتبطة خطيا أو مستقلة خطيا حسبما تكون متجهات صفوف مصفوفة معاملات كثيرات الحدود

$$A = \begin{bmatrix} a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{20} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m0} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

مرتبطة أو مستقلة خطيا . أى حسبما تكون الرتبة r للمصفوفة A أصغر من أو تساوى m .

١٥ – إذا كانت كل واحدة من المجموعتين التاليتين مرتبطة خطيا ، فأوجد تركيبا خطيا لكل منهما ، يساوى الصفر .

(ا)
$$P_1 = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$$
$$P_2 = 2x^2 - 6x + 4$$
$$P_3 = x^3 - 2x^2 + x$$

(ب)
$$P_1 = 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x + 3$$
$$P_2 = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$$
$$P_3 = x^4 + 2x^3 - x^2 + x + 2$$

الجواب (ا) $2P_1 + P_2 - 2P_3 = 0$ (ب) $P_1 + P_2 - 2P_3 = 0$

١٦ - ابحث فى الارتباط و الاستقلال الخطيين لمجموعة المصفوفات من الدرجة 2×2 على F

$$M_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},\ M_2 = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix},\ M_3 = \begin{bmatrix} p & q \\ s & t \end{bmatrix}$$

برهن أن صحة العلاقة $k_1M_1 + k_2M_2 + k_3M_3 = 0$ ، إذا كانت k (فى F) ليست كلها متلاشية يتطلب أن تكون المصفوفة $\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ p & q & s & t \end{bmatrix}$ ذات رتبه أصغر من العدد 3 . (لاحظ أن المصفوفات $M_1\ M_2\ M_3$ معتبرة كمعبرة عن متجهات ذات أربع مركبات) مدد هذه النتيجة لمجموعة مكونة منمصفوفات من الدرجة $m\times n$.

١٧ - برهن أن $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ مرتبطة خطيا .

١٨ - برهن أنه يمكن كتابة أى مصفوفة درجتها 2×2 كتركيب خطى للمصفوفات $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ عمم ما سبق على المصفوفات ذات الدرجة $n\times n$

١٩ - إذا كانت المتجهات ذات الـ n مركبة $X_1, X_2, \dots, X_n$ مستقلة خطيا ، فبرهن أن $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ ، حيث $Y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j$ ، مستقلة خطيا فيما إذا كان (وإذا كان فقط) $A = a_{ij}$ غير شاذ .

٢٠ - إذا كانت A مصفوفة رتبتها r . بين كيف يمكن بناء مصفوفة غير شاذة B بحيث يكون $AB = [C_1, C_2, \dots, C_r, 0, \dots, 0]$ حيث $C_1, C_2, \dots, C_r$ هى مجموعة معطية من أعمدة A المستقلة خطيا .

٢١ - لتكن النقاط : $P_1(1,1,1,1)$ ، $P_2(1,2,3,4)$ ، $P_3(2,2,2,2)$ ، و $P_4(3,4,5,6)$ أربع نقاط من فراغ ذى أربعة أبعاد

(ا) برهن أن رتبة $[P_1, P_3]'$ تساوى الواحد وأن هاتين النقطتين واقعتان على مستقيم يمر بنقطة الأصل .

(ب) برهن أن رتبة $[P_1, P_2, P_3, P_4]'$ تساوى 2 وأن هذه النقاط واقعة فى مستوى مار بنقطة الأصل .

(جـ) هل تقع النقطة $P_5\ (2, 3, 2, 5)$ فى المستوى الوارد فى (ب) .

٢٢ - برهن أن كل مصفوفة A مربعة ومن الدرجة n على F تحقق معادلة من الشكل

$$A^p + k_1A^{p-1} + k_2A^{p-2} + \dots + k_{p-1}A + k_pI = 0$$

حيث k_i هى أعداد من F .

إرشاد : أنظـــر فى $I, A, A^2, A^3, \dots, A^{n^2}$ واستعن بالمسألة ١٦ .

٢٣ - أوجد المعادلة ذات أقل درجة (أنظر فى المسألة ٢٢) والتى تتحقق بـ $A^{-1} = I - \frac{1}{2}A$ ،

(ا) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، (ب) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، (جـ) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

الجواب (ا) $A^2 - 2A = 0$ ، (ب) $A^2 - 2A + I = 0$ (جـ) $A^2 - 2A + 2I = 0$ ،

٢٤ - فى (ب) و (جـ) من المسألة ٢٣ اضرب كل معادلة فى A^{-1} لكى تحصل على (ب) $A^{-1} = I - \frac{1}{2}A$ ، و (جـ) $A^{-1} = 2I - A$ ، ومن ثم حقق مايلى : إذا كان A معرفا على F وغير شاذ فإنه يمكن التعبير عن A^{-1} بكثير حدود بالنسبة لـ A معاملاتها عناصر من F .

الفصل العاشر

المعـــادلات الخطية

تعـــاريف :

اعتبر مجموعة من m معادلة خطية فى ال n مجهولا $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = h_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = h_m \end{cases} \tag{10.1}$$

حيث المعاملات a والحدود الثابتة h هى عناصر فى F

تسمى أى مجموعة متغيرات $x_1, x_2, \dots, x_n$ من F حلا لهذه المجموعة من المعادلات فى F فيما إذا حققت جميع هذه المعادلات . إذا كان لهذه المجموعة حل فإننا نقول عنها إنها **متسقة (غير متعارضة)** وتسمى فى الحالة المعاكسة بأنها **غير متسقة (متعارضة)** . إن المجموعة المتسقة يكون لهـــا إما حل واحد أو عدد غير نهائى من الحلول .

نقول عن مجموعتين من المعادلات الخطية المعرفة على F فى نفس العدد من المجاهيل ، إنهما **متكافئتان** فيما إذا كان كل حل لواحدة منهما حلا للأخرى وبالعكس . يمكن استنتاج مجموعة مكافئة للمجموعة (10.1) بتطبيق واحد أو أكثر من التحويلات على هذه المجموعة : (ا) المبادلة بين اثنين من معادلات المجموعة (ب) ضرب أى معادلة من هذه المجموعة بعنصر غير متلاشى من F أو (جـ) إضافة معادلة مضروبة بثابت إلى أى معادلة أخرى من المجموعة . يقوم حل مجموعة معادلات متسقة على تغيير المجموعة المفروضة بمجموعة أخرى مكافئة لهـــا وذات شكل خاص .

الحل باستعمال مصفوفة :

إذا استعملنا رمز المصفوفات فإنه يمكن كتابة مجموعة المعادلات الخطية (10.1) بالشكل :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \cdot \\ h_m \end{bmatrix} \tag{10.2}$$

أو بشكل أكثر إيجـــازاً :

$$AX = H \tag{10.3}$$

حيث $A = [a_{ij}]$ هى مصفوفة المعاملات و $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]'$ و $H = [h_1, h_2, \dots, h_m]'$.

لنعتبر الآن المصفوفة الممددة لمجموعة المعادلات (10.1)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & h_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & h_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & h_m \end{bmatrix} = [A \quad H] \qquad (10.4)$$

(كل صف من (10.4) هو شكل مختصر للمعادلة المناظرة من (10.1) ولإستنتاج معادلة من صف يكفى أن نضيف المجاهيل وإشارات الـ + وإشارة الـ = بطريقة ملائمة) .

لحل مجموعة المعادلات (10.1) بواسطة المصفوفة (10.4) نطبق التحويلات الأولية للصفوف لكى نستعيض عن A بالمصفوفات القانونية الصفية المكافئة الواردة فى الفصل ٥ .

مثال ١ : حـــل المجموعة :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

إن المصفوفة الممددة :

$$[A \quad H] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

أى أن الحل هو مجموعة المعادلات المحددة $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1$ الممثلة فى الصورة الإتجاهية $X = [1, 0, 1]'$

نظريـــات أســـاسية :

عندما تحول مصفوفة المعاملات A للمجموعة (10.1) إلى شكلها القانونى الصفى المكافىء C فإننا نفرض أن $[A \quad H]$ قد تحولت إلى $[C \quad K]$ حيث $K = [k_1, k_2, \dots, k_m]'$. إذا كانت رتبة A هى r فإن الصفوف الـ r الأول من C تحوى عنصراً أو أكثر غير صفرى . إن العنصر الأول غير الصفرى فى كل من هذه الصفوف يساوى الواحد أما بقية عناصر العمود الذى يقع فيه هذا الواحد فهى أصفار . وتتكون الصفوف المتبقية من أصفار فقط . من الصفوف الـ r الأول من $[C \quad K]$ يمكننا الحصول على كل من المتغيرات $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_r}$ (الرموز هى ذاتها الواردة فى الفصل ٥) بدلالة المجاهيل الباقية $x_{j_{r+1}}, x_{j_{r+2}}, \dots, x_{j_n}$ وواحد من $k_1, k_2, \dots, k_r$.

إذا كان $k_{r+1} = k_{r+2} = \dots = k_m = 0$, فإن هذا يعنى أن (10.1) متوافقة وأى مجموعة اختيارية من القيم للمتغيرات $x_{j_{r+1}}, x_{j_{r+2}}, \dots, x_{j_n}$ بالإضافة إلى القيم الناتجة $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_r}$ تكون حلا . وعلى العكس إذا كان على الأقل واحد من $k_{r+1}, k_{r+2}, \dots, k_m$ يختلف عن الصفر وليكن مثلا $k_t \neq 0$ فإن المعادلة المناظرة تكتب بالشكل

$$0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = k_t \neq 0$$

وهذا يعنى أن المجموعة (10.1) متناقضة (متعارضة)

فى الحالة التى تكون فيها المجموعة متوافقة ، يكون لـ A و $[A \ H]$ رتبة واحدة ، أما فى الحالة التى لاتكون فيها المجموعة متوافقة فإن لهاتين المصفوفتين رتبتين مختلفتين .

أى :

I – تكون مجموعة المعادلات $AX = H$ المكونة من m معادلة خطية فى n مجهولا ، متوافقة فيما إذا كان (وإذا كان فقط) لمصفوفة المعاملات والمصفوفة الممددة للمجموعة رتبة واحدة .

II – فى مجموعة متوافقة (10.1) ذات رتبة r حيث $r < n$ ، يمكن اختيار $(n-r)$ من المجاهيل بحيث تكون مصفوفة معاملات المجاهيل الـ r الباقية ذات رتبة مساوية r . وعندما تعطى لهذه الـ $(n-r)$ مجهولا قيم اختيارية ، فإن بقية المجاهيل والتى عددها r تتعين بشكل وحيد .

مثال ٢ : لمجموعة المعادلات (14) يكون

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 10 \end{cases}$$

$$[A \quad H] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & -5 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -11 & -8 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -11 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [C \quad K]$$

بما أن رتبة كل من A و $[A \quad H]$ واحدة وتساوى 3 فإن المجموعة المعطاة متوافقة علاوة على ذلك فإن الحل العام يحوى $n - r = 4 - 3 = 1$ ثابتا اختياريا . من الصف الأخير من $[C \ K]$ ، $x_4 = 0$. لنفرض أن $x_3 = a$ حيث a عدد اختيارى ، فنجد $x_1 = 10 + 11a$ و $x_2 = -2 - 4a$

ويكون حل المجموعة هو $x_1 = 10 + 11a, \ x_2 = -2 - 4a, \ x_3 = a, \ x_4 = 0$

أو $X = [10 + 11a, \ -2 - 4a, \ a, \ 0]'$.

إذا كان لمجموعة معادلات متوافقة على F حل وحيد (مثال ١) فإن هذا الحل ينتمى إلى F . وإذا كان لهذه المجموعة عدد لانهائى من الحلول (مثال ٢) فإن هذه الحلول تقع فى F فيما إذا اختيرت القيم الاختيارية من F . ولكن المجموعة يكون لها عدد لانهائى من الحلول التى تنتمى إلى أى حقل يكون F حقلا جزئياً منه . مثال ذلك : يكون لمجموعة معادلات المثال ٢ عدد لانهائى من الحلول على F (حقل الأعداد الجذرية) فيما إذا كان a قد اختير من بين الأعداد الجذرية ، ولها عدد لانهائى من الحلول الحقيقية فيما إذا كان اختيار a من بين الأعداد الحقيقية ولها عدد لانهائى من الحلول المركبة فيما إذا كان اختيار a من مجموعة الأعداد المركبة .

أنظـر المسألتين ١ – ٢

المعادلات غير المتجانسة :

تسمى المعادلة الخطية :

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = h$$

معادلة غير متجانسة فيما إذا كان $h \neq 0$ وتسمى المجموعة $AX = H$ مجموعة معادلات غير متجانسة فيما إذا كان H متجها غير صفرى . إن مجموعتى المثالين ١ و ٢ هما مجموعتين غير متجانستين .

سنبرهن فى المسألة ٣

III – يكون لمجموعة مكونة من n معادلة غير متجانسة ذات n مجهولا ، حل وحيد فيها إذا كانت رتبة مصفوفة المعاملات A مساوية n أى إذا كان $|A| \neq 0$.

بالإضافة إلى الطريقة المذكورة آنفا . سنقدم طريقتين إضافيتين لحل مجموعة متوافقة مكونة من n معادلة غير متجانسة ومتعددة المجاهيل $AX = H$. أولى هاتين الطريقتين هى الطريقة المعتادة باستخدام المحددات .

(ا) الحـل باستخدام قاعدة كرامر . لنرمز بالرمز A_i حيث $(i = 1, 2, \dots, n)$ للمصفوفة التى نحصل عليها من المصفوفة A بالإستعاضة عن العمود ذى الرقم i ، بعمود المقادير الثابتة (عمود المقادير h) . فإذا كانت $|A| \neq 0$ فإن المجموعة $AX = H$ يكون لهـا الحل الوحيد :

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{|A_n|}{|A|} \qquad (10.5)$$

أنظـر المسألة ٤ .

مثال ٣ : حل مجموعة المعادلات

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \end{cases}$$

مستخدما قاعدة كرامر

نجد على التوالى

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -120, \qquad |A_1| = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & -4 \\ 8 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -240$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -4 \\ 3 & 8 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -24, \qquad |A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & 6 & 8 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

و

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & 6 & -2 & 8 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -96$$

ويكون أخيراً :

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-240}{-120} = 2, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-24}{-120} = \frac{1}{5}, \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{0}{-120} = 0,$$

و

$$x_4 = \frac{|A_4|}{|A|} = \frac{-96}{-120} = \frac{4}{5}.$$

(ب) الحل بإستعمال A^{-1} إذا كان $|A| \neq 0$ فإنه يوجد A^{-1} ويكون حل المجموعة $AX = H$ هو

$$A^{-1} \cdot AX = A^{-1}H \quad \text{أو} \quad X = A^{-1}H \qquad (10.6)$$

مثال ٤ : إن مصفوفة معاملات مجموعة المعادلات

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

هى $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

ومن الجزء (ب) فى المسألة ٢ من الفصل السابع نجد أن . $A^{-1} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$: وعلى ذلك فإن

$$A^{-1} \cdot AX = X = A^{-1}H = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 35 \\ 29 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ويكون حل مجموعة المعادلات هو : $x_1 = 35/18,\ x_2 = 29/18,\ x_3 = 5/18.$

أنظـر المسألة ٥

المعـادلات المتجانسـة :

إن المعادلة الخطية $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$

(10.7)

تسمى معادلة خطية **متجانسة** . ومجموعة المعادلات الخطية :

$$AX = 0$$

(10.8)

ذات الـ n مجهولا ، تسمى **مجموعة معادلات متجانسة** . إن رتبة مصفوفة المعاملات A لمجموعة المعادلات (10.8) هى نفسها رتبة المصفوفة الممتدة $[A\ O]$ وعلى ذلك فهذه المجموعة تكون متوافقة دائماً . يلاحظ أن $X=0$ أى أن $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ هو دائماً حل للمجموعة يسمى هذا الحل **بالحل التافه (عديم الأهمية)** .

إذا كانت رتبة A مساوية n فإنه يمكن حل n معادلة من مجموعة المعادلات (10.8) باستخدام قاعدة كرامر ويكون لها حل وحيد هو $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ ويكون للمجموعة الحل التافه فقط . وإذا كانت رتبة A هى r حيث $n > r$ فإن النظرية II تؤكد وجود حل غير تافه للمجموعة . وعلى ذلك .

IV – إن الشرط اللازم والكافى ليكون للمجموعة (10.8) حل بالإضافة إلى الحل التافة ، هو أن تكون رتبه A هى r حيث $n > r$.

V – أن الشرط اللازم والكافى ليكون لمجموعة مكونة من n معادلة متجانسة ذات n مجهولا حلا غير الحل التافه ، هو أن يكون $0 = |A|$.

VI – إذا كانت رتبة (10.8) هى r حيث $n>r$ فإن لها ، على الضبط ، $(n-r)$ حلا مستقلة خطيا وإن كل حل آخر هو تركيب خطى من الـ $(n-r)$ حلا وإن كل تركيب خطى لهذه الحلول هو حل أيضا .

انظـر المسألة ٦

لنفرض أن X_1 و X_2 حلان مختلفان للمجموعة $AX = H,$ فيكون $AX_1 = H,\ AX_2 = H,$ و $A(X_1 - X_2) = AY = 0.$ أى أن $Y = X_1 - X_2$ حل غير تافه للمجموعة $AX = 0$.

وعلى العكس . إذا كان Z حل غير تافه للمجموعة $AX=0$ وإذا كان X_p حلا للمجموعة $AX = H.$ فإن $X = X_p + Z$ هو حل أيضا للمجموعة $AX = H$. بما أن Z يمثل الحل التام المجموعة $AX = 0$ فإنه ينتج عن هذا أن $X_p + Z$ يمثل الحل التام للمجموعة $AX = H$ أى :

VII إذا كانت مجموعة المعادلات الغير متجانسة $AX = H$ متسقة فإننا نحصل على حل تام لهذه المجموعة بأن نضيف إلى الحل التام للمجموعة $AX = 0$ حـلا خاصاً للمجموعة $AX = H$.

مثال ٥ : في المجموعة $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$ ضع $x_1 = 0$ فنجد أن $x_3 = 2$ و $x_2 = 1$. ويكون $X_p = [0, 1, 2]'$ حلا خاصاً لهذه المجموعة . إن الحل التام للمجموعة $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ هو $[-7a, a, 3a]'$، حيث a اختيارى ويكون الحل التام للمجموعة المعطاة هو

$$X = [-7a, a, 3a]' + [0, 1, 2]' = [-7a, 1+a, 2+3a]'$$

ملاحظـــة :

يمكن أن تمتد الطريقة السابقة على مجموعة أكبر . ومن الضرورى عندها أن نبرهن أن المجموعة متسقة ومن العسير حل هذه المجموعة بطريقة المصفوفة الممددة كما أعطيت أعلاه .

مســائل محلولة

١ – حــل

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 9x_5 = 3 \end{cases}$$

الحــل :

إن المصفوفة الممددة

$$[A\ H] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -18 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -18 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -18 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

وعلى ذلك $x_1 = 1,\ x_2 - 2x_3 = 0,$ و $x_4 + 3x_5 = 0.$ لنفرض $x_3 = a$ ، $x_5 = b$ حيث a و b اختياريان . إن الحل التام يعطى بما يلي :

$x_1 = 1,\ x_2 = 2a,\ x_3 = a,\ x_4 = -3b,\ x_5 = b$ أو بالشكل $X = [1, 2a, a, -3b, b]'.$

٢ – حــل

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$$

الحل :

$$[A\ H] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 0 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -13 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 5 & 13 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

إن الصف الأخير يعطى $0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 = -5;$ وعلى ذلك فالمجموعة المعطاة هى مجموعة متعارضة وليس لها حل .

٣ – برهن أنه يكون للمجموعة $AX = H$ المكونة من n معادلة غير متجانسة فى n مجهولا ، حل وحيد فيما إذا كان $|A| \neq 0$.

إذا كانت A غير شاذة فإنها تكافىء I . ولنفرض أنه عندما تحول A إلى I بواسطة تحويلات صفية فقط، فإن $[A\ H]$ تتحول إلى $[I\ K]$ ، ويكون عندها $X = K$ حلا لهذه المجموعة .

لنفرض بعد ذلك أن $X = L$ حل آخر للمجموعة فإن $AK = H$ و $AL = H$ و $AK = AL$

وبما أن A غير شاذة فإن $K = L$ وإن الحـــل وحيد .

٤ – استنتج قاعدة كرامر :

لتكن مجموعة المعادلات غير المتجانسة :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = h_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = h_n \end{cases} \qquad (1)$$

ولنرمز بالرمز A لمصفوفة المعاملات $[a_{ij}]$ وبالرمز α_{ij} للمعامل المرافق للعنصر a_{ij} من A لنضرب المعادلة الأولى من (1) فى α_{11} ، والمعادلة الثانية فى α_{21} ، .... ، والمعادلة الأخيرة فى α_{n1} ونجمع النتائج فنحصل على :

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i1}\alpha_{i1}x_1 + \sum_{i=1}^{n} a_{i2}\alpha_{i1}x_2 + \dots + \sum_{i=1}^{n} a_{in}\alpha_{i1}x_n = \sum_{i=1}^{n} h_i\alpha_i$$

ونجد من النظريتين X و XI والمسألة ١٠ من الفصل الثالث أن هذه العلاقة تختصر إلى الشكل :

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} \quad \text{أى} \quad |A|\cdot x_1 = \begin{vmatrix} h_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ h_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A_1|$$

ثم لنضرب معادلات المجموعة (1) على التوالى فى α_{12} و α_{22} و ... و α_{n2} ونجمع النواتج فنجد

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} \quad \text{ومنه} \quad |A|\cdot x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & h_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & h_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & h_n & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A_2|$$

ولنستمر على هذا المنوال ولنضرب أخيراً معادلات المجموعة (1) على التوالى فى α_{1n} و α_{2n} و ... و α_{nn} ولنجمع النواتج فنجد :

$$x_n = \frac{|A_n|}{|A|} \quad \text{ومنه} \quad |A|\cdot x_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & h_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2,n-1} & h_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & h_n \end{vmatrix} = |A_n|$$

٥ – حل المجموعة

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \end{cases}$$

مستخدماً معكوس مصفوفة المعاملات

الحل :

إن معكوس المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ هو $\frac{1}{120}\begin{bmatrix} 120 & 120 & 0 & -120 \\ -69 & -73 & 17 & 80 \\ -15 & -35 & -5 & 40 \\ 24 & 8 & 8 & -40 \end{bmatrix}$ إذن

$$X = \frac{1}{120}\begin{bmatrix} 120 & 120 & 0 & -120 \\ -69 & -73 & 17 & 80 \\ -15 & -35 & -5 & 40 \\ 24 & 8 & 8 & -40 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{bmatrix}$$

(أنظر المثال ٣)

٦ - حل

$$\text{e}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

الحل :

$$[A \quad H] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

إن الحل التام لهذه المجموعة هو $x_1 = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b,\ x_2 = -\frac{1}{2}a - \frac{3}{2}b,\ x_3 = a,\ x_4 = b.$

وبما أن رتبة المصفوفة A تساوى 2 فإننا نحصل على $n - r = 4 - 2 = 2$ حلا مستقلا خطيا . فنحصل مثلا ، على إحدى هذه الأزواج بأن نأخذ أولا $a = 1, b = 1$ ثم $a = 3, b = 1$ فيكون :

$$x_1 = 0,\ x_2 = -2,\ x_3 = 1,\ x_4 = 1 \quad \text{و} \quad x_1 = -1,\ x_2 = -3,\ x_3 = 3,\ x_4 = 1$$

ماذا يمكننا أن نقول عن زوج الحلول الذى نحصل عليه عندما نأخذ

$$a = b = 1 \quad \text{و} \quad a = b = 3 \ ؟$$

٧ - برهن مايلى : فى مصفوفة مربعة A من الدرجة n والرتبة $(n - 1)$ تكون المعاملات المرافقة لعناصر أى صفين . (عمودين) من A متناسبة .

بما أن $|A| = 0$ ، فإن المعاملات المرافقة لعناصر أى صف (عمود) من A هى حل X_1 ، للمجموعة $AX = 0\ (A'X = 0)$. بما أنه ليس للمجموعة سوى حل وحيد مستقل خطيا وذلك لأن رتبة $A\ (A')$ هى $(n - 1)$ وعلى ذلك فللمعاملات المرافقة لصف (عمود) آخر من A (حلا آخر X_2 لهذه المجموعة) ونحصل على $X_2 = kX_1$.

٨ - برهن أنه إذا كانت $f_1, f_2, \ldots, f_m$ هى m حيث $m < n$ صورة خطية مستقلة فى n متغير على F فإن الـ p صورة خطية

$$g_j = \sum_{i=1}^{m} s_{ij} f_i, \qquad (j = 1, 2, \ldots, p)$$

مرتبطة خطيا ، فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) رتبة المصفوفة $[s_{ij}]$ ذات الدرجة $m \times p$ هى r حيث $r < p$.
إن الـ $g's$ مرتبطة خطيا فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) توجد كميات عدديه $a_1, a_2, \ldots, a_p$ من F ليست كلها أصفاراً وتحقق العلاقة :

$$a_1g_1 + a_2g_2 + \dots + a_pg_p = a_1\sum_{i=1}^{m} s_{i1}f_i + a_2\sum_{i=1}^{m} s_{i2}f_i + \dots + a_p\sum_{i=1}^{m} s_{ip}f_i$$
$$= (\sum_{j=1}^{p} a_js_{1j})f_1 + (\sum_{j=1}^{p} a_js_{2j})f_2 + \dots + (\sum_{j=1}^{p} a_js_{mj})f_m$$
$$= \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{p} a_js_{ij})f_i = 0$$

بما أن الـ $f's$ مستقلة خطيا فإن هذا يتطلب

$$\sum_{j=1}^{p} a_js_{ij} = a_1s_{i1} + a_2s_{i2} + \dots + a_ps_{ip} = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, m)$$

والآن ووفقا للنظرية IV يكون لمجموعة الـ m معادلة متجانسة ذات الـ p مجهولا $\sum_{j=1}^{p} s_{ij}x_j = 0$ حل غير تافه من الشكل $X = [a_1, a_2, \dots, a_p]'$ وذلك إذا كان (وإذا كان فقط) رتبة المصفوفة $[s_{ij}]$ هي r و $p>r$.

٩ – لنفرض أن $A = [a_{ij}]$ من الدرجة n مصفوفة شاذة . برهن أنه يوجد دوما مصفوفة $B = [b_{ij}] \neq$ من الدرجة n بحيث يكون $AB = 0$.

افرض أن $B_1, B_2, \dots, B_n$ هي متجهات أعمدة B . من الفرض $AB_1 = AB_2 = \dots = AB_n = 0$.

اعتبر أي واحدة من هذه العلاقات ولتكن $AB_t = 0$ أو :

$$\begin{cases} a_{11}b_{1t} + a_{12}b_{2t} + \dots + a_{1n}b_{nt} = 0 \\ a_{21}b_{1t} + a_{22}b_{2t} + \dots + a_{2n}b_{nt} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}b_{1t} + a_{n2}b_{2t} + \dots + a_{nn}b_{nt} = 0 \end{cases}$$

بما أن مصفوفة المعاملات A شاذة فإن للمجموعة التي مجاهيلها $b_{1t}, b_{2t}, \dots$ حلا مخالفا للحل التافه ، وبالمثل ... $AB_1 = 0,\ AB_2 = 0,$ لها حلول يمثل كل منها عموداً من B .

مسائل اضافية

١٠ – أوجد كل حلول المجموعات التالية :

(ا) $x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 1$

(جـ) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 + 7x_2 - 7x_3 = 5 \end{cases}$

(ب) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$

(د) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$

الأجوبة : (ا) $x_1 = 1 + 2a - b + 3c,\ x_2 = a,\ x_3 = b,\ x_4 = c$

(ب) $x_1 = -7a/3 + 17/3,\ x_2 = 4a/3 - 5/3,\ x_3 = a$

(د) $x_1 = -x_2 = 1,\ x_3 = -x_4 = 2$

١١ – أوجد كل الحلول غير التافهة للمجموعات :

(أ) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$ ، (جـ) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

(ب) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$ (د) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 7x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ 2x_1 - 11x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 0 \end{cases}$

الأجوبة : (أ) $x_1 = -3a,\ x_2 = 0,\ x_3 = a$

(ب) $x_1 = -x_2 = -x_3 = a$

(د) $x_1 = -\frac{5}{8}a + \frac{3}{8}b,\ x_2 = a,\ x_3 = \frac{7}{4}a - \frac{5}{4}b,\ x_4 = b$

١٢ – قارن حل (د) من المسألة رقم ١٠ مع الحل الآخر $x_1 = c,\ x_2 = d,\ x_3 = -\frac{10}{3}c - \frac{d}{3},\ x_4 = \frac{8}{3}c + \frac{5}{3}d.$

١٣ – إذا أعطيت المصفوفة ، $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ فأوجد المصفوفة B ذات الرتبة الثانية والتي تحقق العلاقة $AB = 0$

إرشاد : اختر أعمدة B من حلول المجموعة $AX = 0$.

١٤ – برهن أن مصفوفة مربعة تكون شاذة إذا كانت (وإذا كانت فقط) صفوفها (أعمدتها) مرتبطة خطيا .

١٥ – لتكن $AX = 0$ مجموعة من n معادلة متجانسة ذات n مجهولا ولنفرض أن $r = n - 1$ هي رتبة A.
برهن أن أي متجه غير صفري للمعاملات المرافقة $[\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in}]'$ لصف من A هو حل للمجموعة $AX = 0$.

١٦ – استخدم المسألة ١٥ لحل المجموعات :

(أ) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$ ، (ب) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ ، (جـ) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$

إرشاد : أضف إلى معادلات (أ) المعادلة $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$ ثم أوجد المعاملات المرافقة لعناصر الصف الثالث من المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

الأجوبة : (أ) $x_1 = -27a,\ x_2 = 0,\ x_3 = 9a$ أو $[3a, 0, -a]'$ ، (ب) $[2a, -7a, -17a]'$ ، (جـ) $[11a, -2a, -4a]'$

١٧ – لنفرض أن كلا من رتبة مصفوفة معاملات مجموعة من ثلاث معادلات غير متجانسة في خمسة مجاهيل $AX = H$ ورتبة المصفوفة الممدة لهذه المجموعة تساوي 2 ولنفرض أن الشكل القانوني للمصفوفة الممدة هو

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & b_{13} & b_{14} & b_{15} & c_1 \\ 0 & 1 & b_{23} & b_{24} & b_{25} & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حيث لايساوي كل من c_1 و c_2 معا الصفر . لنختر أولاً $x_3 = x_4 = x_5 = 0$
فنجد $X_1 = [c_1, c_2, 0, 0, 0]'$ حلا لـ $AX = H$ ونختار بعد ذلك $x_3 = 1,\ x_4 = x_5 = 0$ ثم $x_4 = 1$
، $x_3 = x_5 = 0$ وأخيراً $x_5 = 1$ ، $x_3 = x_4 = 0$ لكي نجد حلولا أخرى X_2 و X_3 و X_4 برهن أن الحلول
$4 = 1 + 2 - 5$ تكون مستقلة خطيا .

١٨ – اعتبر التركيب الخطى $Y = s_1X_1 + s_2X_2 + s_3X_3 + s_4X_4$ لحلول المسألة ١٧ . برهن أن Y حل لـ $AX = H$ إذا كان (وإذا كان فقط) (i) $s_1+s_2+s_3+s_4 = 1$. وإن Y هو الحل التام ، فيما إذا كانت s_1, s_2, s_3, s_4 اختيارية ومرتبطة بالعلاقة (i) للمجموعة $AX = H$.

١٩ – برهن النظرية VI . إرشاد : اتبع المسألة ١٧ وافرض أن $c_1 = c_2 = 0$

٢٠ – برهن أنه إذا كانت A مصفوفة درجتها $m \times p$ ورتبتها r_1 و B مصفوفة درجتها $p \times n$ ورتبتها r_2 بحيث يكون $AB = 0$ فإن $r_1 + r_2 \leqq p$.

إرشاد : استفد من النظـــرية VI .

٢١ – باستعمال المصفوفة $A = [a_{ij}]$ ذات الدرجة 4×5 والرتبة 2 تحقق من أنه : فى مصفوفة A درجتها $m \times n$ ورتبتها r تكون المحددات المربعة ذات الدرجة r والمكونة من أعمدة المصفوفة الجزئية المكونة من أى r صفا من المصفوفة A ، متناسبة مع المحددات من درجة r المكونة من أى مصفوفة جزئية أخرى تحوى r صفا من A .

إرشاد : نفرض أن الصفين الأولين مستقلان خطيا فيكون عندها $a_{3j} = p_{31}a_{1j} + p_{32}a_{2j},\ a_{4j} = p_{41}a_{1j} + p_{42}a_{2j},$ $(j = 1, 2, \dots, 5).$
احسب بعد ذلك المحددات ذات الدرجة الثانية .

$$\begin{vmatrix} a_{3q} & a_{3s} \\ a_{4q} & a_{4s} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{1q} & a_{1s} \\ a_{3q} & a_{3s} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{1q} & a_{1s} \\ a_{2q} & a_{2s} \end{vmatrix}.$$

٢٢ – اكتب برهان النظرية الواردة فى المسألة ٢١ .

٢٣ – استنتج من المسألة ٧ مايلى : إذا كانت A مصفوفة مربعة من درجة n وذات رتبة تساوى $n-1$ ، فإن العلاقات التالية بين المعاملات المرافقة تكون صحيحة :

(أ) $\alpha_{ij}\alpha_{hk} = \alpha_{ik}\alpha_{hj}$ (ب) $\alpha_{ii}\alpha_{jj} = \alpha_{ij}\alpha_{ji}$

حيث : $(h, i, j, k = 1, 2, \dots, n).$

٢٤ – برهن أن
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
مكافىء صفيا لـ
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
. من $B = [A \ H]$ استنتج أن مجموعة من ست معادلات خطية فى أربعة مجاهيل يكون لها خمس معادلات مستقلة خطيا وبرهن أن مجموعة من m حيث $n<m$ معادلة خطية ذات n مجهولا تحوى على الأكثر $(n+1)$ معادلة مستقلة خطيا ثم برهن أنه عندما يوجد فعلا $n+1$ معادلة مستقلة خطيا فإن المجموعة تكون غير متوافقة .

٢٥ – إذا كانت $AX = H$ مجموعة متوافقة رتبتها r . لأى مجموعة مكونة من r مجهولا يمكن الحل ؟

٢٦ – عمم نتائج المسألة ١٧ والمسألة ١٨ على m معادلة غير متجانسة فى n مجهولا وافرض أن لمصفوفة العوامل والمصفوفة الممددة رتبة واحدة r وذلك لكى تبرهن على أنه إذا كانت للمصفوفة الممددة ولمصفوفة العوامل للمجموعة $AX = H$ المكونة من m معادلة غير متجانسة ذات n مجهولا ، رتبة واحدة مساوية r وإذا كانت $X_1, X_2, \dots, X_{n-r+1}$ حلولا مستقلة خطيا للمجموعة ، فإن :

$$X = s_1X_1 + s_1X_2 + \dots + s_{n-r+1}X_{n-r+1}$$

حيث $\sum_{i=1}^{n-r+1} s_i = 1,$ حل تـــام .

٢٧ – تعطى الكميات الداخلة E_1 و I_1 فى شبكة كهربائية ذات أربعة أقطاب بدلالة الكميات الخارجة E_2 و I_2 بما يلى :

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} E_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{array}{l} E_1 = aE_2 + bI_2 \\ I_1 = cE_2 + dI_2 \end{array}$$

برهن أن

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} a & -|A| \\ 1 & -d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad ، \quad \begin{bmatrix} E_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{d}\begin{bmatrix} b & |A| \\ 1 & -c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ E_2 \end{bmatrix}.$$

حل أيضا بالنسبة لـ E_2 و I_2 ، I_1 و I_2 ، I_1 و E_2 .

٢٨ – افرض أن لمجموعة المعادلات الخطية $AX = H$ حيث $H \neq 0$ والتى عددها n معادلة فى n مجهول حل وحيد . برهن أن للمجموعة $AX = K$ حل وحيد لأى متجه $K \neq 0$ له n مركبة .

٢٩ – حل مجموعة الصور الخطية

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

حيث x_i صور خطية لـ y's

والآن اكتب حل المجموعة $A' X = Y$.

٣٠ – لتكن A مصفوفة مربعة من درجة n وغير شاذة ولتفرض أن S_i حل للمجموعة $AX = E_i, (i = 1, 2, \ldots, n)$. حيث E_i متجه ذو n مركبة حيث تساوى مركبته التى رقمها i الواحد وتساوى كل واحدة من بقية المركبات الصفر . حقق المصفوفة $[S_1, S_2, \ldots, S_n]$.

٣١ – لتكن A مصفوفة من الدرجة $m \times n$ حيث $n > m$ ولنفرض أن S_i حل لـ $AX = E_i, (i = 1, 2, \ldots, m)$. حيث E_i متجه ذو m مركبة تساوى مركبة ذات الرقم i الواحد وتساوى كل واحدة من بقية المركبات الصفر . إذا كان $K = [k_1, k_2, \ldots, k_m]'$ فبرهن أن

$$k_1 S_1 + k_2 S_2 + \ldots + k_m S_m$$

هو حل للمجموعة $AX = K$

الفصل الحادى عشر

الفراغات الاتجاهيـــة

سنمثل فيما يلى ، كل متجه بمتجه عمود ، مالم نذكر خلاف ذلك . وعندما تكون مركبات المتجه واضحة فإننا سنكتبه بالشكل $[x_1, x_2, \ldots, x_n]'$. إن رمز منقول المصفوفة ($'$) يشير إلى أنه يجب أن تكتب هذه العناصر فى عمود .

إن مجموعة من هذه المتجهات ذات الـ n مركبة والمعرفة على F تكون **مغلقة بالنسبة للجمع** فيما إذا كان مجموع أى متجهين منها ، متجه من هذه المجموعة . وبالمثل تكون هذه المجموعة **مغلقة بالنسبة للضرب بمقدار عددى** ، فيما إذا كان حاصل ضرب أى عنصر من F بأى متجه من هذه المجموعة يعطى متجها من المجموعة ذاتها .

مثال ١ :

(ا) إن مجموعة كل المتجهات $[x_1, x_2, x_3]'$ من الفراغ العادى ذات المركبات المتساوية $(x_1 = x_2 = x_3)$ مغلقة بالنسبة للجمع والضرب بعدد ، وذلك لأن مجموع أى متجهين من هذه المجموعة وحاصل ضرب أى متجه منها بأى عدد حقيقى k هما متجهان مركبات كل منهما متساوية أيضاً

(ب) إن مجموعة كل المتجهات $[x_1, x_2, x_3]'$ من الفراغ العادى مغلقة بالنسبة للجمع والضرب بعدد .

الفراغات الاتجاهية :

إن كل مجموعة من المتجهات ذات الـ n مركبة على F مغلقة بالنسبة للجمع والضرب بمقدار عددى تدعى فراغا اتجاهيا وهكذا ، إذا كان $X_1, X_2, \ldots, X_m$ متجهات ذات n مركبة على F فإن مجموعة كل التراكيب (التآلفات) الخطية :

$$k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_mX_m \qquad (11.1)$$

حيث (k_i فى F)

هى فراغ إتجاهى على F . مثال ذلك أن كلا من مجموعتى المتجهات الواردة فى (ا) و (ب) من المثال ١ فراغ إتجاهى ، ومن الواضح أن كل فراغ إتجاهى من الشكل (11.1) يحوى صفر المتجهات ذات الـ n مركبة . وأن المتجه الصفرى ذا الـ n مركبة بمفرده هو فراغ إتجاهى . (يسمى الفراغ (11.1) أيضاً **فراغاً إتجاهياً خطياً**) .

إن المجموعة الكلية $V_n(F)$ لكل المتجهات ذات الـ n مركبة على F تدعى **فراغاً إتجاهياً من البعد n على F**

الفراغ الجزئى :

نقول عن مجموعة V من المتجهات $V_n(F)$ إنها **فراغ جزئى من $V_n(F)$** فيما إذا كانت V مغلقة بالنسبة للجمع وللضرب بمقدار عددى وهكذا فإن صفر المتجهات ذات الـ n مركبة هو فراغ جزئى من $V_n(F)$ وكذلك الحال بالنسبة إلى $V_n(F)$ ذاته . إن المجموعة (ا) الواردة فى المثال ١ هى فراغ جزئى (خط) من الفراغ العادى . عموماً إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_m$ منتمية إلى $V_n(F)$ فإن فراغ جميع التراكيب الخطية (11.1) يكون فراغاً جزئياً من $V_n(F)$.

نقول عن فراغ إتجاهى V **إنه مولد بالمتجهات** $X_1, X_2, \ldots, X_m$ ذات الـ n مركبة فيما إذا تحقق (ا) X_i منتمية إلى V (ب) كل متجه من V هو تركيب خطى (11.1) للمتجهات المفروضة . لنلاحظ أنه ليس من الضرورى أن نقصر المتجهات $X_1, X_2, \ldots, X_m$ على الحالة التى تكون فيها مستقلة خطيا .

مثال ٢ :

ليكن F حقل الأعداد الحقيقية R ولتكن المتجهات ذات الثلاث مركبات، $X_1 = [1, 1, 1]'$، $X_2 = [1, 2, 3]'$، $X_3 = [1, 3, 2]'$، $X_4 = [3, 2, 1]'$ الواقعة فى الفراغ العادى $S = V_3(R)$. إن كل متجه $[a, b, c]'$ من S يمكن التعبير عنه كما يلى :

$$y_1X_1 + y_2X_2 + y_3X_3 + y_4X_4 = \begin{bmatrix} y_1 + y_2 + y_3 + 3y_4 \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 2y_4 \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 + y_4 \end{bmatrix}$$

وذلك لأن مجموعة المعادلات الناتجة

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 + 3y_4 &= a \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 2y_4 &= b \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 + y_4 &= c \end{aligned} \qquad (i)$$

متوافقة وتكون المتجهات X_1, X_2, X_3, X_4 مولدة لـ S

إن المتجهين X_1 و X_2 مستقلان خطياً فهما يولدان فراغاً جزئياً (المستوى π) من S يحوى كل متجه من الشكل $hX_1 + kX_2$، حيث h و k عددان حقيقيان .

يولد المتجه X_4 فراغاً جزئياً (الخط L) من S وهو يحوى كل متجه من الشكل hX_4 حيث h عدد حقيق .
أنظـــر المسألة ١

الأســـاس والبعـــد :

نعنى ببعد فراغ إتجاهى V أكبر عدد من المتجهات المستقلة خطياً والواقعة فى V أو بشكل مكافىء ، أصغر عدد من المتجهات المستقلة خطياً يكفى لتوليد V . فى علم الهندسة الأولية ، يعتبر الفراغ العادى فراغاً ذا ثلاثة أبعاد للنقط (a, b, c) وسنعتبره هنا كفراغ ذى ثلاثة أبعاد للمتجهات $[a, b, c]$. إن المستوى π الوارد فى المثال ٢ ذو بعدين وإن الخط L ذو بعد واحد .

يرمز لفراغ إتجاهى بعده r ومكون من n متجها بالشكل $V_n^r(F)$ وعندما تكون $r = n$ فن المقبول كتابة $V_n(F)$ بدلا من $V_n^n(F)$

تدعى أى مجموعة مكونة من r متجها مستقلة خطياً من $V_n^r(F)$ أساساً لهذا الفراغ . ويكون عندها . كل متجه من هذا الفراغ تركيباً خطياً وحيداً لمتجهات الأساس . إن لكل قواعد الفراغ $V_n^r(F)$ عدد واحد من المتجهات وإن أى r متجها مستقلة خطياً تصلح أساساً لهذا الفراغ .

مثال ٣ :

إن المتجهات X_1, X_2, X_3 الواردة فى المثال ٢ تولد S لأنه يمكن التعبير عن أى متجه $[a, b, c]'$ من S بالشكل :

$$y_1X_1 + y_2X_2 + y_3X_3 = \begin{bmatrix} y_1 + y_2 + y_3 \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 \end{bmatrix}$$

إن لمجموعة المعادلات الناتجة ،
$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = a \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 = b \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 = c \end{cases}$$
على النقيض من (i) حل وحيد . إن المتجهات X_1, X_2, X_3 هى أساس الفراغ S . إن المتجهات X_1, X_2, X_4 ليست أساساً لـ S (برهن ذلك) . إنها تولد الفراغ الجزئى π من المثال ٢ الذى أساسه المجموعة $X_1\ X_2$.

إن النظريات $I - V$ الواردة فى الفصل التاسع قابلة للتطبيق هنا طبعاً . على وجه الخصوص فإن النظرية IV يمكن إعادة صياغتها على النحو التالى :

I. إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_m$ هى مجموعة من المتجهات ذات n مركبة على F وإذا كانت r رتبة المصفوفة ذات الدرجة $n \times m$ لمركبات هذه المتجهات، فإنه يمكن الاختيار ، من هذه المتجهات ، لـ r متجها فقط مستقلة خطياً تولد الفراغ $V_n^r(F)$ الذى يحوى الـ $(m-r)$ متجها الباقية .

أنظــر المسألتين ٢ – ٣

إن لما يلى من نظريات أهمية خاصة :

II. إذا كان $X_1, X_2, \ldots X_m$ هى m حيث $n > m$ متجها ذات n مركبة ومستقلة خطياً من $V_n(F)$ وإذا كانت $X_{m+1}, X_{m+2}, \ldots, X_n$ هى أى $(n-m)$ متجها من $V_n(F)$ أيضا والتى تكون مع $X_1, X_2, \ldots X_m$ مجموعة مستقلة خطياً فإن المجموعة $X_1, X_2, \ldots, X_n$ تكون أساس الفراغ $V_n(F)$.

أنظــر المسألة ٤

III. إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_m$ هى m حيث $n > m$ متجها ذات n مركبة ومستقلة خطياً على F، فإن الـ p متجها

$$Y_j = \sum_{i=1}^{m} s_{ij} X_i \qquad (j = 1, 2, \ldots, p)$$

تكون مرتبطة خطياً فيما إذا كان $m < p$ أو ، عندما يكون $p \leqq m$ إذا كانت رتبة المصفوفة $[s_{ij}]$ هى r حيث $p > r$

IV. إذا كانت المتجهات $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ذات n مركبة ومستقلة خطياً على F ، فإن المتجهات $Y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$ تكون مستقلة خطياً فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) $[a_{ij}]$ غير شاذة

الفراغات الجزئية المتطابقة :

إذا كان $_1V_n^r(F)$ و $_2V_n^r(F)$ فراغين جزئيين من $V_n(F)$ فإنهما يكونان متطابقين فيما إذا كان (وإذا كان فقط) كل متجه من $_1V_n^r(F)$ هو متجه من $_2V_n^r(F)$ والعكس أى إذا كان وإذا كان فقط كل واحد منهما فراغاً جزئياً من الآخر .

أنظــر المسألة ٥

مجموع وتقاطع فراغين :

ليكن $V_n^h(F)$ ، $V_n^k(F)$. فراغين إتجاهيين نعنى بمجموع هذين الفراغين مجموعة كل المتجهات $X + Y$ حيث X من $V_n^h(F)$ و Y من $V_n^k(F)$ ومن الواضح أن هذا فراغ اتجاهى نسميه **فراغ المجموع** ونرمز له بالرمز $V^s_n(F)$.
إن البعد s لفراغ مجموع فراغين اتجاهيين لايزيد على مجموع بعدى هذين الفراغين .

ونعنى **بتقاطع** فراغين إتجاهيين كل المتجهات المشتركة بين هذين الفراغين إذا كان X متجها مشتركا بين هذين الفراغين فإن aX مشترك بينهما أيضاً وكذلك إذا كان X و Y متجهين مشتركين بين الفراغين المذكورين فإن $aX + bY$ واقع فى تقاطعهما وهذا يؤدى إلى أن تقاطع فراغين اتجاهيين هو فراغ اتجاهى ندعوه **فراغ التقاطع** ونرمز له بالرمز $V_n^t(F)$. إن بعد فراغ التقاطع لايزيد عن أصغر بعدى الفراغين المفروضين

V. إذا كان لفراغين إتجاهيين $V_n^h(F)$ و $V_n^k(F)$ مجموع $V_n^s(F)$ وتقاطع $V_n^t(F)$ فإن $h + k = s + t$

مثال ٤ :

ليكن الفراغ الجزئى π_1 المولد بالمتجهين X_1 و X_2 من المثال ٢ والفراغ الجزئى π_2 المولد بالمتجهين X_3 و X_4 .
أن بما π_1 و π_2 غير متطابقين (برهن ذلك) وبما أن هذه المتجهات الأربعة تولد S فإن فراغ مجموع π_1 و π_2 هو S .

والآن بما أن $X_4 = X_2 - X_1 4$ فإن X_4 ينتمى فى الوقت ذاته . إلى π_1 و π_2 إن الفراغ الجزئى (الخط L) المولد بـ X_4 هو إذن تقاطع الفراغين π_1 و π_2 . يلاحظ أن بعد كل من π_1 و π_2 هو 2 وأن بعد S يساوى 3 بينما بعد L يساوى الواحد . وهذا يتفق مع النظرية V .

أنظـر المسائل ٦ - ٨

انعدامية (صفرية) مصفوفة :

تكون حلول مجموعة متجانسة من المعادلات الخطية $AX = 0$ فراغاً إتجاهياً نسميه الفراغ الصفرى للمصفوفة A . يسمى بعد هذا الفراغ والذى نرمز له بالرمز N_A **بصفرية** A (انعدامية A) .

وإذا تذكرنا النظرية VI من الفصل العاشر فإننا نجد :

VI. إذا كانت N_A هى صفرية A فإن المجموعة $AX = 0$ يكون لها N_A حلا مستقلة خطياً $X_1, X_2, ..., X^{N_A}$ وبحيث يكون كل حل من حلول المجموعة $AX = 0$ هو تركيب خطى لهذه الحلول وكل تركيب خطى لهذه الحلول حل للمجموعة .

إن أساس الفراغ الصفرى لـ A هو أى مجموعة من N_A من الحلول المستقلة خطياً لـ $AX = 0$.

أنظـر المسألة ٩

VII. لأى مصفوفة A درجتها $m \times n$ ورتبتها r_A وصفريتها N_A تتحقق العلاقة :

$$r_A + N_A = n \tag{11.2}$$

قوانين سيلفستر للانعداميـــة :

إذا كانت A و B مصفوفتين من درجة n وكانت رتبتاهما على الترتيب r_A و r_B فإن رتبة وانعدامية حاصـل ضربهما AB تحقق المتباينات

$$\begin{aligned} r_{AB} &\geq r_A + r_B - n \\ N_{AB} &> N_A, \quad N_{AB} > N_B \\ N_{AB} &\leq N_A + N_B \end{aligned} \tag{11.3}$$

أنظـر المسألة ١٠

الأســـاس والاحداثيات :

تسمى المتجهات ذات الـ n مركبة :

$$E_1 = [1, 0, 0, \ldots, 0]', \quad E_2 = [0, 1, 0, \ldots, 0], \quad \ldots, \quad E_n = [0, 0, 0, \ldots, 1]'$$

متجهات أولية أو متجهات وحدة معرفة على F . يسمى المتجه الأولى E_j الذى مركبته ذات الرقم j تساوى الواحد ، المتجه الأولى ذا الرقم j ، تؤلف المتجهات الأولية $E_1 E_2, ..., E_n$ أسساً هامة للفراغ $V_n(F)$.

يمكن التعبير عن كل متجه $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]'$ من $V_n(F)$ بشكل وحيد ، بالمجموع

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i E_i = x_1 E_1 + x_2 E_2 + \cdots + x_n E_n$$

للمتجهات الأولية . و هذه الحالة تسمى المركبات $x_1, x_2, \ldots x_n$ للمتجه X احداثيات X بالنسبة للأساس E سنعتبر بعد الآن ، إلا إذا أشير بغير ذلك ، أن كل متجه X معطى منسوباً لهذا الأساس .

لنفرض أن $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ أساس آخر لـ $V_n(F)$. توجد مقادير عددية وحيدة $a_1, a_2, \ldots, a_n$ من F بحيث يكون :

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i Z_i = a_1 Z_1 + a_2 Z_2 + \cdots + a_n Z_n$$

تسمى المقادير العددية $a_1, a_2, \ldots, a_n$ احداثيات المتجه X بالنسبة للأساس Z . إذا كتبنا $X_Z = [a_1, a_2, \ldots, a_n]'$ فإننا نجد :

$$X = [Z_1, Z_2, \ldots, Z_n] X_Z = Z \cdot X_Z \quad (11.4)$$

حيث Z هى مصفوفة أعمدتها هى متجهات الأساس $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$.

مثال ٥ :

إذا كانت $Z_1 = [2, -1, 3]'$, $Z_2 = [1, 2, -1]'$, $Z_3 = [1, -1, -1]'$ هى أسس $V_3(F)$ وكان $X_Z = [1,2,3]'$ هو متجها من $V_3(F)$ منسوباً إلى هذه القاعدة ، فإننا نجد :

$$X = [Z_1, Z_2, Z_3] X_Z = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = [7, 0, -2]'$$

منسوبة للأساس E .

أنظـــر المسألة ١١

افرض أن $W_1, W_2, \ldots, W_n$ أسس آخر لـ $V_n(F)$ وافرض أن $X_W = [b_1, b_2, \ldots, b_n]'$ بحيث يكون :

$$X = [W_1, W_2, \ldots, W_n] X_W = W \cdot X_W \quad (11,5)$$

نستنتج من (11.4) و (11.5) أن $X = Z \cdot X_Z = W \cdot X_W$

و $X_W = W^{-1} \cdot Z \cdot X_Z = P X_Z \quad (11.6)$

حيث $P = W^{-1}Z$ ويكون :

VIII إذا كانت X_Z و X_W احداثيات متجه من الفراغ $V_n(F)$ بالنسبة لأساسين لهذا الفراغ فإنه يوجد مصفوفة غير شاذة P معينة بشكل وحيد بهذين الأساسين ومعطية بـ (١١-٦) بحيث يكون $X_W = P X_Z$.

انظر المسألة ١٢

مســـــائل محلولة

١ - إن مجموعة كل المتجهات $X = [x_1, x_2, x_3, x_4]'$ حيث $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ هى فراغ جزئى V من $V_4(F)$ لأن مجموع أى متجهين من هذه المجموعة وحاصل ضرب أى متجه منها بأى مقدار عددى يكون متجها مجموع مركباته يساوى الصفر ، أى أنها متجهان فى هذه المجموعة .

٢ - بما أن رتبة المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ تساوى 2 فإن المتجهات $X_1 = [1, 2, 2, 1]'$, $X_2 = [3, 4, 4, 3]'$, و $X_3 = [1, 0, 0, 1]'$ مرتبطة خطياً وتولد فراغاً إتجاهياً $V_4^2(F)$ أى أن متجهين من المتجهات المفروضة مستقلة خطياً وهذا يعنى أنه يمكننا أن نأخذ X_1 و X_2 ، X_1 و X_3 أو X_2 و X_3 ، كقاعدة للفراغ الاتجاهى $V_4^2(F)$.

٣ - بما أن $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ من الرتبة الثانية فإن المتجهات $X_1 = [1,1,1,0]'$ ، $X_2 = [4,3,2,-1]'$، $X_3 = [2,1,0,-1]'$ و $X_4 = [4,2,0,-2]'$ مرتبطة خطياً وأنهـا تولد فراغاً $V_4^2(F)$.

يمكننا أن نأخذ كأساس لهذا الفراغ ، أى زوج من المتجهات الأربعة ماعدا الزوج X_3 و X_4 .

٤ - أن المتجهات X_3 و X_2 و X_1 الواردة فى المسألة ٢ تقع فى $V_4(F)$. أوجد أساساً لهذا الفراغ .

يمكننا أن نأخذ أساساً لهذا الفراغ المتجهات $X_1، X_2$ ، $X_4 = [1.0.0.0]'$ و $X_5 = [0.1.0.0]'$ أو $X_1، X_2$ ، $X_6 = [1.2.3.4]'$ و $X_7 = [1.3.6.8]'$ وذلك لأن المصفوفتين $| X_1, X_2, X_4, X_5 |$ و $| X_1, X_2, X_6, X_7 |$ من الرتبة الرابعة .

٥ – لتكن $X_1 = [1,2,1]'$، $X_2 = [1,2,3]'$، $X_3 = [3,6,5]'$، $Y_1 = [0,0,1]'$، $Y_2 = [1,2,5]'$ متجهات من $V_3(F)$. برهن أن الفراغ المولد بالمتجهات $X_1\ X_2\ X_3$ والفراغ المولد – بالمتجهين Y_1 و Y_2 متطابقان .

لتلاحظ أولا أن X_1 و X_2 مستقلان خطياً بينما $X_3 = 2X_1 + X_2$ وهذا يعنى أن X_i تولد فراغاً اتجاهياً بعد 2 وليكن ${}_1V_3^2(F)$. وأن Y_i متجهين مستقلين خطياً يولدان فراغاً اتجاهياً بعده 2 وليكن ${}_2V_3^2(F)$.

بعد ذلك $X_2 = Y_2 - 2Y_1$. $X_1 = Y_2 - 4Y_1$. $Y_2 = 2X_2 - X_1$; $Y_1 = \frac{1}{2}X_2 - \frac{1}{2}X_1$. وهكذا نجد أن أى متجه $aY_1 + bY_2$ من ${}_2V_3^2(F)$ هو متجه $(\frac{1}{2}a+2b)X_2 - (\frac{1}{2}a+b)X_1$ من ${}_2V_3^2(F)$ ونجد بالطريقة ذاتها أن أى متجه $cX_1 + dX_2$ من ${}_1V_3^2(F)$ هو متجه $(c+d)Y_2 - (4c+2d)Y_1$ من ${}_2V_3^2(F)$ وهذا يؤدى إلى أن الفراغين متطابقين .

٦ – (ا) إذا كان $X = [x_1\ x_2\ x_3]'$ واقعاً فى $V_3^2(F)$ المولد بالمتجهين $X_1 = [1,-1,1]'$ و $X_2 = [3,4,-2]'$

فإن

$$\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 3 \\ x_2 & -1 & 4 \\ x_3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 0.$$

(ب) إذا كان $X = [x_1x_2x_3x_4]'$ واقعاً فى الفراغ $V_4^2(F)$ المولدبالمتجهين $X_1 = [1,1,2,3]'$ و $X_2 = [1,0,-2,1]'$

فإن $\begin{bmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 & 2 & -2 \\ x_4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ من الرتبة الثانية . بما أن $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0,$ فإن ذلك يتطلب $\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0$

و

$$\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 .$$

إن هذه المسائل توضح أن كل فراغ إتجاهى $V_n^k(F)$ يمكن تعريفه كمجموعة كل الحلول على F لمجموعة مكونة من $(n-k)$ معادلة متجانسة ومستقلة خطياً معرفة على F وذات n مجهولا .

٧ – برهن أنه إذا كان $V_n^h(F)$ و $V_n^k(F)$ مجموع وتقاطع الفراغين الاتجاهين $V_n^s(F)$ و $V_n^t(F)$ فإن $h + k = s + t$

لنفرض أن $t = h$ فينتج عن ذلك أن $V_n^h(F)$ فراغ جزئى من $V_n^k(F)$ وأن مجموعهما هو V_n^k نفسه ويكون عندها $s = k$، $t = h$ وهذا يؤدى إلى $s + t = h + k$. ويمكن للقارىء أن يبرهن على أن هذا يكون صحيحاً أيضاً إذا كان $t = k$

لنفرض . بعد ذلك أن $t < h$ و $k > t$ وليكن X_1 و X_2 و ... و X_t مولدة لـ $V_n^t(F)$. من النظرية II . يوجد متجهات $Y_{t+1}, Y_{t+2}, \ldots, Y_h$ بحيث تولد المجموعة $X_1, X_2, \ldots, X_t, Y_{t+1}, \ldots, Y_h$ الفراغ $V_n^k(F)$ كما يوجد متجهات $Z_{t+1}, Z_{t+2}, \ldots, Z_k$ بحيث تولد المجموعة $X_1, X_2, \ldots, X_t, Z_{t+1}, \ldots, Z_k$ الفراغ $V_n^k(F)$.

لنفرض الآن أنه يوجد أعداد a وأعداد b بحيث يكون:

$$\sum_{i=1}^{t} a_i X_i + \sum_{i=t+1}^{h} a_i Y_i + \sum_{i=t+1}^{k} b_i Z_i = 0 \qquad (11.4)$$

أو

$$\sum_{i=1}^{t} a_i X_i + \sum_{i=t+1}^{h} a_i Y_i = \sum_{i=t+1}^{k} -b_i Z_i$$

أن المتجه على الشمال يتبع $V_n^h(F)$ ، وبسبب الطرف الأيمن منها ، فإنه يتبع أيضاً $V_n^k(F)$. فهو إذن يتبع $V_n^t(F)$. ولكن $X_1, X_2, \ldots, X_t$ تولد الفراغ $V_n^t(F)$ فينتج عن ذلك أن . $a_{t+1} = a_{t+2} = \ldots = a_h = 0.$

والآن من (11.4)

$$\sum_{i=1}^{t} a_i X_i + \sum_{i=t+1}^{k} b_i Z_i = 0$$

ولكن ال $X's$ وال $Z's$ مستقلة خطياً فيكون إذن $a_1 = a_2 = \ldots = a_t = b_{t+1} = b_{t+2} = \ldots = b_k = 0$ ؛ وهكذا تكون المتجهات $Z's$ و $Y's$ و $X's$ مجموعة مستقلة خطياً ومولدة للفراغ $V_n^s(F)$ أى أن $s = h+k-t$ قد تحققت .

٨ – ليكن الفراغ الإتجاهى $_1V_3^2(F)$ الذى يكون $X_1 = [1,2,3]'$ و $X_2 = [1,1,1]'$ أساساً له والفراغ الإتجاهى $_2V_3^2(F)$ الذى يكون $Y_1 = [3,1,2]'$ ، $Y_2 = [1,0,1]'$ أساساً له . بما أن مصفوفة المركبات $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ من الرتبة الثالثة فإن فراغ المجموع هو $V_3(F)$. يمكننا أن نأخذ X_1 و X_2 و Y_1 كأساس له .

ينتج من $h+k = s+t$ أن فراغ التقاطع يكون $V_3^1(F)$. لكى نوجد أساساً نساوى بين تركيبين خطيين للمتجهات منسوبة إلى أساس كل من $_1V_3^2(F)$ و $_2V_3^2(F)$ بالشكل التالى :

$$aX_1 + bX_2 = cY_1 + dY_2$$

لنأخذ $d = 1$ للتيسير ، ولنحل مجموعة المعادلات $\begin{cases} a + b - 3c = 1 \\ 2a + b - c = 0 \\ 3a + b - 2c = 1 \end{cases}$ ، فنجد $a = 1/3,\ b = -4/3,\ c = -2/3.$

أى أن $aX_1 + bX_2 = [-1,-2/3,-1/3]'$ قاعدة لفراغ التقاطع ونجد أيضاً أن المتجه $[3,2,1]'$ قاعدة للفراغ المذكور .

٩ – أوجد أساس الفراغ المعدوم للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

اعتبر مجموعة المعادلات $AX = O$ التى يمكن اختصارها للمجموعه $\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$ إن أساس الفراغ الصفرى للمصفوفة A تتكون من الحلين المستقلين خطياً لهذه المجموعة وهما : $[1,2,0,-1]'$ و $[2,1,-1,0]'$.

١٠ – برهن أن $r_{AB} \geq r_A + r_B - n$.

لنفرض أولا ، أن A من الشكل $\begin{bmatrix} I_{r_A} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ فتكون ال r_A صفاً الأول من AB هى ال r_A صفا الأول من B بينما تكون الصفوف الباقية أصفاراً . من المسألة ١٠ من الفصل الخامس تكون رتبة AB محققة للعلاقة $r_{AB} \geqq r_A + r_B - n$.

لنفرض ، بعد ذلك ، أن A ليست من الشكل السابق الذكر فيوجد إذن مصفوفتان غير شاذتين P و Q بحيث يكون لـ PAQ ذلك الشكل بينما تكون رتبة $PAQB$ مساوياً على التمام رتبة AB (لماذا ؟)

يمكن للقارىء أن يعتبر الحالة الخاصة التى يكون فيها $B = \begin{bmatrix} I_{r_B} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

١١ – ليكن المتجه $X = [1,2,1]'$ منسوباً للأساس E . أوجد مركباته منسوباً للأساس الجديد $Z_1 = [1,1,0]'$ ، $Z_2 = [1,0,1]'$ و $Z_3 = [1,1,1]'$.

الحل (أ) لنكتب :

(i) $X = aZ_1 + bZ_2 + cZ_3$. أى $\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} = a\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ فينتج $\begin{cases} a+b+c=1 \\ a \quad +c=2 \\ \quad b+c=1 \end{cases}$ ونجد أخيراً $a = 0,\ b = -1,$

$c = 2$. ويكون $X_Z = [0,-1,2]'$ منسوباً للأساس Z

الحل (ب) بإعادة كتابة (i) بالشكل $X = [Z_1, Z_2, Z_3]X_Z = ZX_Z$, فيكون :

$$X_Z = Z^{-1}X = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\1 & -1 & 0\\-1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} = [0,-1,2]'$$

١٢ – افرض X_Z و X_W كاحداثيات المتجه X بالنسبة للأساسين $Z_1 = [1,1,0]'$, $Z_2 = [1,0,1]'$, $Z_3 = [1,1,1]'$ و $W_1 = [1,1,2]'$, $W_2 = [2,2,1]'$, $W_3 = [1,2,2]'$. عين المصفوفة P بحيث يكون $X_W = PX_Z$

بما أن $Z = [Z_1, Z_2, Z_3] = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$, و $W = \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\1 & 2 & 2\\2 & 1 & 2\end{bmatrix}$, و $W^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & -3 & 2\\2 & 0 & -1\\-3 & 3 & 0\end{bmatrix}$,

فإنه يكون $P = W^{-1}Z = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1 & 4 & 1\\2 & 1 & 1\\0 & -3 & 0\end{bmatrix}$ استناداً إلى (١١–٦)

مسائل اضافية

١٣ – ليكن $[x_1, x_2, x_3, x_4]'$ متجها اختياريا من $V_4(R)$ حيث R ترمز لحقل الأعداد الحقيقية بين أى من المجموعات التالية فراغات جزئية من $V_4(R)$ ؟

(أ) جميع المتجهات التى يكون لهــا $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$.

(ب) جميع المتجهات التى يكون لهــا $x_1 = x_2,\ x_3 = 2x_4$.

(جـ) جميع المتجهات التى يكون لهــا $x_4 = 0$

(د) جميع المتجهات التى يكون لهــا $x_1 = 1$

(هـ) جميع المتجهات التى يكون لهــا x_1, x_2, x_3, x_4 أعداد صحيحة .

الجــواب : كلها عدا (د) و (هـ) فراغات جزئية .

١٤ – برهن أن $[1,1,1,1]'$ و $[2,3,3,2]'$ أساس $V_4^2(F)$ الوارد فى المسألة ٢

١٥ – عين بعد الفراغ الإتجاهى المولد بكل واحدة من مجموعات المتجهات التالية ثم اختر أساساً لكل منها

(أ) $[1,2,3,4,5]'$, $[5,4,3,2,1]'$, $[1,1,1,1,1]'$

(ب) $[1,1,0,-1]'$, $[1,2,3,4]'$, $[2,3,3,3]'$

(جـ) $[1,1,1,1]'$, $[3,4,5,6]'$, $[1,2,3,4]'$, $[1,0,-1,-2]'$

الجـــواب : (١) ، (ب) ، (جـ) $r = 2$

١٦ – برهن أن المتجهين $X_1 = [1,-1,1]'$ و $X_2 = [3,4,-2]'$ يولدان الفراغ ذاته الذى يولده المتجهان $Y_1 = [9,5,-1]'$ و $Y_2 = [-17,-11,3]$

(ب) برهن أن المتجهين $X_1 = [1,-1,1]'$ و $X_2 = [3,4,-2]'$ لا يولدان الفراغ ذاته الذى يولده المتجهان $Y_1 = [-2,2,-2]'$ و $Y_2 = [4,3,1]'$

١٧ – برهن أنه إذا كانت مجموعة المتجهات $X_1, X_2, \ldots, X_k$ أساساً للفراغ $V_n^k(F)$ فإنه يمكن كتابة أى متجه آخر Y من هذا الفراغ ، بشكل وحيد ، كتركيب خطى لـ $X_1, X_2, \ldots, X_k$.

إرشاد : افرض أن $Y = \sum_{i=1}^{k} a_i X_i = \sum_{i=1}^{k} b_i X_i$

١٨ – لتكن المصفوفة ذات الدرجة 4×4 متجهات أعمدتها هى متجهات أساس الفراغ $V_4^2(R)$ من المسألة ٢ أساس الفراغ $V_4^2(R)$ من المسألة ٣ . برهن أن رتبة هذه المصفوفة تساوى 4 . وهكذا يكون $V_4(R)$ فراغ مجموع الفراغين المذكورين و $V_4^0(R)$ ، فراغ الصفر ، هو فراغ تقاطع هذين الفراغين .

١٩ – تتبع البرهان المعطى فى المسألة ٨ فى الفصل العاشر لبرهان النظرية III .

٢٠ – برهن على أن بعد الفراغ المولد بـ $[1,0,0,1,1]'$, $[0,0,1,0,0]'$, $[1,0,1,0,0]'$, $[0,0,0,0,1]'$, $[1,0,0,0,0]'$ هو البعد الرابع وأن بعد الفراغ المولد بـ $[0,1,1,1,0]$, $[1,0,-1,0,1]'$, $[0,1,-2,1,0]'$, $[0,1,0,1,0]'$, $[1,0,0,0,1]'$ هو البعد الثالث . برهن أن $[1,0,1,0,1]'$ و $[1,0,2,0,1]'$ يؤلفان أساساً لتقاطع هذين الفراغين .

٢١ – أوجد ، بالنسبة للأساس $Z_1 = [1,1,2]'$, $Z_2 = [2,2,1]'$, $Z_3 = [1,2,2]'$ ، احداثيات كل من المتجهات :

(١) $[1,1,0]'$ (ب) $[1,0,1,]'$ (جـ) $[1,1,1]'$

الجـــواب (١) $[-1/3, 2/3, 0]'$, (ب) $[4/3, 1/3, -1]'$, (جـ) $[1/3, 1/3, 0]'$

٢٢ – أوجد بالنسبة للأساس $Z_1 = [0,1,0]'$, $Z_2 = [1,1,1]'$, $Z_3 = [3,2,1]'$ احداثيات المتجهات

(١) $[2,-1,0]'$ (ب) $[1,-3,5]'$ (جـ) $[0,0,1]'$

الجواب (١) $[-2,-1,1]'$ (ب) $[-6,7,-2]'$ (جـ) $[-1/2, 3/2, -1/2]'$

٢٣ – لتكن X_Z و X_W مركبات متجه X بالنسبة لزوج الأساسين المعطيين أوجد المصفوفة P المحققة للعلاقة : $X_W = P\ X_Z$

(١) $Z_1 = [1,0,0]'$, $Z_2 = [1,0,1]'$, $Z_3 = [1,1,1]'$; $W_1 = [0,1,0]'$, $W_2 = [1,2,3]'$, $W_3 = [1,-1,1]'$

(ب) $Z_1 = [0,1,0]'$, $Z_2 = [1,1,0]'$, $Z_3 = [1,2,3]'$; $W_1 = [1,1,0]'$, $W_2 = [1,1,1]'$, $W_3 = [1,2,1]'$

الجواب (١) $P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ (ب) $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

٢٤ – اثبت أنه إذا كان P_j حلاً للمجموعة $AX = E_j$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$. فإن $\sum_{i=1}^{n} h_j P_j$ حل للمجموعة حيث $H = [h_1, h_2, \ldots, h_n]'$.

إرشاد : $H = h_1E_1 + h_2E_2 + \cdots + h_nE_n$.

٢٥ – يسمى الفراغ الاتجاهى المؤلف من كل التراكيب الخطية لمتجهات أعمدة مصفوفة A ، فراغ الأعمدة لـ A ويسمى الفراغ المعرف بكل التراكيب الخطية لصفوف المصفوفة A فراغ الصفوف لـ A برهن أن أعمدة AB واقعة فى فراغ لأعمدة لـ A وأن صفوف AB واقعة فى فراغ الصفوف لـ B .

٢٦ – برهن أن المجموعة $AX = H$ المكونة من m معادلة غير متجانسة ذات n مجهولا ، تكون متوافقة فيما إذا كان (وإذا كان فقط) المتجه H منتميا إلى فراغ الأعمدة لـ A .

٢٧ – أوجد أساس الفراغ المعدوم للمصفوفتين (ا) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (ب) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

الجواب (ا) $[1,1,-1,]'$ (ب) $[1,1,-1,-1]'$ ، $[1,2,-1,-2]'$

٢٨ – برهن أن : (ا) $N_{AB} \geq N_B$ ، $N_{AB} \geq N_A$ (ب) $N_{AB} \leq N_A + N_B$

الإرشاد : (ا) $N_{AB} = n - r_{AB}$ و $r_A \geqq r_{AB}$ و r_B

(ب) اعتبر $(n - r_{AB})$ وطبق النظرية الواردة فى المسألة ١٠

٢٩ – استنتج طريقة لحل المسألة ١٦ مستعملا فقط تحويلات أعمدة على $A = [X_1, X_2, Y_1, Y_2]$ ثم أعد حل المسألة رقم ٥ .

الفصل الثانى عشر

التحويلات الخطية

تعريف :

ليكن $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]'$ ، $Y = [y_1, y_2, \ldots, y_n]'$ متجهين من $V_n(F)$ حيث نسبت احداثياتها لنفس الأساس لهذا الفراغ ولنفرض أن احداثيات X واحداثيات Y مرتبطة مع بعضها بعضا بالعلاقة :

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases} \qquad (12.1)$$

أو بشكل مختصر

$$Y = A\,X$$

حيث $A = [a_{ij}]$ معرف على F . إن (12.1) تمثل تحويلا T يحول بصورة عامة أى متجه X من $V_n(F)$ إلى (عادة)متجه آخر Y من الفراغ نفسه يدعى المتجه الثانى خيالا للأول .

وإذا حولت (12.1) المتجه X_1 إلى Y_2 و X_2 إلى Y_2 فإنها :

(ا) تحول kX_2 إلى kY_1 مهما كان المقدار العددى k

(ب) تحول $aX_1 + bX_2$ إلى aY_1+bY_2 مهما كان المقداران العدديان a و b لهذا السبب سمى هذا التحويل خطياً .

مثال ١ :

اعتبر التحويل الخطى $Y = AX = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} X$ فى الفراغ العادى $V_3(R)$

(ا) إن خيال $[2,0,5]'$ = هو $Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 27 \\ 17 \end{bmatrix} = [12, 27, 17]'.$

(ب) نحصل على المتجه X الذى خياله $Y = [2, 0, 5]'$ بحل المجموعة $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$. حيث :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 13/5 \\ 0 & 1 & 0 & 11/5 \\ 0 & 0 & 1 & -7/5 \end{bmatrix}. \quad X = [13/5, 11/5, -7/5]'.$$

نظريات أساسية :

إذا فرضنا فى (12.1) أن $X = [1,0,\ldots,0]' = E_1$ فإن $Y = [a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}]'$ وبصورة عامة إذا كان $X = E_i$ فإن $Y = [a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}]'$. أى

I – يتعين التحويل الخطى (12.1) تعينا وحيداً عندما نعرف أخيلة قاعدة الفراغ الإتجاهى الذى عرف عليه هذا التحويل . أن أعمدة المصفوفة A هى على الترتيب احداثيات أخيلة هذه المتجهات .

انظــر المسألة ١

يقال عن التحويل الخطى (12.1) إنه غير شاذ فيما إذا كانت خيالات المتجهات المتميزة X_i هى متجهات مختلفة متميزة Y_i وفى الحالة المعاكسة نصف هذا التحويل بأنه شاذ .

II – يكون التحويل الخطى (12.1) غير شاذ فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) المصفوفة A ، مصفوفة التحويل الخطى غير شاذة .

انظــر المسألة ٢

III – يحول التحويل الخطى غير الشاذ مجموعة مستقلة (غير مستقلة) خطيا إلى مجموعة مستقلة (غير مستقلة) خطيا .

انظــر المسألة ٣

ينتج عن النظرية III مايلى :

IV – بتطبيق التحويل الغير شاذ (12.1) فإن خيال فراغ $V_n^k(F)$ يكون فراغاً إتجاهياً $V_n^k(F)$ أى أن بعد الفراغ الاتجاهى قد حفظ . بصورة خاصة إن التحويل الخطى لـ $V_n(F)$ هو تقابل لهذا الفراغ مع نفسه .

عندما تكون A غير شاذة ، فإن عكس (12.1)

$$X = A^{-1} Y$$

يحول المتجهات $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ التى تكون مركباتها هى أعمدة A إلى متجهات أساس الفراغ الإتجاهى . وإن هذا التحويل هو تحويل خطى أيضاً .

V – إن من الممكن إيجاد تحويل خطى غير شاذ يحول مجموعة المتجهات الأولية E_i للفراغ الإتجاهى $V_n(F)$ إلى أى مجموعة مكونة من n متجها ذا n مركبة مستقلة خطيا والعكس صحيح .

VI– إذا حول $Y = AX$ متجها X إلى متجه Y وإذا حول $Z = BY$ المتجه Y إلى Z وإذا حول $W = CZ$ فإن $Z = BY = (BA)X$ يحول X إلى Z وإن $W = (CBA)X$ يحول X إلى W .

VII – إذا أعطيت مجموعتان تتكون كل واحدة منها من n متجها ذات n مركبة مستقلة خطيا ، فإنه يوجد تحويل خطى غير شاذ يحول متجهات واحدة منها إلى متجهات أخرى .

تغيير الأساس :

لنفرض أن $Y_Z = AX_Z$ تحويل خطى للفراغ الإتجاهى $V_n(F)$ منسوباً للأساس Z . ولنفرض أنه قد تغير الأساس ولنفرض أن X_W و Y_W تمثل احداثيات X_Z و Y_Z فى الأساس الجديد . استناداً إلى النظرية VIII من الفصل ١١ ، يوجد مصفوفة غير شاذة P بحيث يكون $X_W = PX_W$ و $Y_Z = PY_Z$ أو يوضع $P^{-1} = Q$ بحيث يكون

$$Y_Z = Q\,Y_W \quad \text{و} \quad X_Z = Q\,X_W$$

فإن
$$Y_W = Q^{-1}Y_Z = Q^{-1}AX_Z = Q^{-1}AQX_W = BX_W$$

حيث
$$B = Q^{-1}AQ \tag{12.2}$$

نقول عن مصفوفتى A و B أنهما متشابهتان فيما إذا وجدت مصفوفة غير شاذة Q تحقق العلاقة $B = Q^{-1} A Q$ وبذلك تكون قد برهنا النظرية :

VIII إذا كان $Y_Z = AX_Z$ تحويلا خطيا لـ $V_n(F)$ بالنسبة لأساس معين (الأساس Z) وإذا كان $Y_W = BX_W$ التحويل الخطى ذاته بالنسبة لأساس آخر (الأساس W) فإن A و B تكونان متشابهتين .

ملاحظة :

بما أن $Q = P^{-1}$ فإنه من الممكن كتابة (12.2) بالشكل $B = PAP^{-1}$. سنقدم فيما بعد دراسة للمصفوفات المتشابهة وسنفضل كتابة $B = R^{-1}AR$ على الكتابة $B = SAS^{-1}$ وذلك لمبررات غير إلزامية .

مثال ٢ :

ليكن $Y = AX = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} X$ تحويل خطى بالنسبة للأساس E ولنفرض أن

$W_1 = [1,2,1]'$, $W_2 = [1,-1,2]'$, $W_3 = [1,-1,-1]'$ أساس جديد (ا) أعطيت المتجه $[3,0,2]'$ $= X$ فأوجد احداثيات خياله بالنسبة للأساس W . (ب) أوجد التحويل الخطى $Y_W = BX_W$ المناظر للتحويل الخطى $Y = AX$. (جـ) استخدم نتائج (ب) لإيجاد الخيال Y_W للمتجه $X_W = [1,3,3]'$

اكتب $W = [W_1, W_2, W_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$; ثم استنتج $W^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & -1 & -3 \end{bmatrix}$.

(ا) إن للمتجه $X = [3,0,2]'$ بالنسبة للأساس W الاحداثيات : $X_W = W^{-1}X = [1,1,1]'$ وإن خيال X هو $Y = AX = [9,5,7]'$ الذى يكتب بالنسبة للأساس W بالشكل $Y_W = W^{-1}Y = [14/3, 20/9, 19/9]'$

(ب)
$$Y_W = W^{-1}Y = W^{-1}AX = (W^{-1}AW)X_W = BX_W = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 36 & 21 & -15 \\ 21 & 10 & -11 \\ -3 & 23 & -1 \end{bmatrix} X_W$$

(جـ)
$$Y_W = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 36 & 21 & -15 \\ 21 & 10 & -11 \\ -3 & 23 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} = [6,2,7]'.$$

أنظـــر المسألة ٥

مسائل محلولة

١ – (ا) عين التحويل الخطى $Y = AX$ الذى يحول E_1 إلى $Y_1 = [1,2,3]'$ ، E_2 إلى $[3,1,2]'$ و E_3 إلى $Y_3 = [2,1,3]'$

(ب) أوجد أخيلة المتجهات $X_1 = [1,1,1]'$ ، $X_2 = [3,-1,4]'$ و $X_3 = [4,0,5]'$.

(جـ) برهن أن X_1 و X_2 مستقلان خطيا وأن خياليهما أيضاً مستقلان خطيا .

(د) برهن أن X_1 ، X_2 و X_3 مرتبطة خطياً وأن أخيلتها أيضاً مرتبطة خطياً .

(ا) من النظرية I يكون $A = [Y_1, Y_2, Y_3]$ وتكتب معادلة التحويل الخطى بالشكل $Y = AX = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} X$.

(ب) إن خيال $X_1 = [1,1,1]'$ هو $Y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [6,4,8]'$ وخيال X_2 هو $Y_2 = [8,9,19]'$ وخيال X_3 هو $Y_3 = [14,13,27]'$

(ﺟ) إن رتبة المصفوفة $[X_1, X_2] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ تساوى 2 وكذلك رتبة المصفوفة $[Y_1, Y_2] = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 9 \\ 8 & 19 \end{bmatrix}$ تساوى 2

إذن المتجهان X_1 و X_2 مستقلان خطياً وكذلك يكون خيالاهما مستقلين خطياً

(د) علينا أن نقارن بين رتبتى المصفوفتين $[X_1, X_2, X_3]$ و $[Y_1, Y_2, Y_3]$ وبما أن $X_3 = X_1 + X_2$ و $Y_3 = Y_1 + Y_2$ فإن كلا من المجموعتين مرتبطة خطياً .

٢ — برهن أنه يكون التحويل الخطى (12.1) غير شاذ فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) A غير شاذة .

لنفرض أن A غير شاذة وأن تحويل $X_1 \neq X_2$ هما $Y = AX_1 = AX_2$ فيكون $A(X_1 - X_2) = 0$ ويكون لمجموعة المعادلات المتجانسة $AX = 0$ حل غير تافه هو $X = X_1 - X_2$ وهكذا ممكن فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) $|A| = 0$ وهذا مخالف لما فرضناه من أن A مصفوفة غير شاذة .

٣ — برهن أن تحويلا خطياً غير شاذ يحول مجموعة متجهات مستقلة خطياً إلى مجموعة متجهات مستقلة خطياً .

لنفرض العكس هو أن الأخيلة $Y_i = AX_i$ حيث $(i = 1, 2, \ldots, p)$ لمجموعة المتجهات المستقلة خطياً $X_1, X_2, \ldots, X_p$ هى مجموعة مرتبطة خطياً وهذا يعنى وجود مقادير عددية $s_1, s_2, \ldots, s_p$ ليست كلها أصفاراً بحيث يكون :

$$\sum_{i=1}^{p} s_i Y_i = s_1 Y_1 + s_2 Y_2 + \cdots + s_p Y_p = 0$$

أو

$$\sum_{i=1}^{p} s_i (AX_i) = A(s_1 X_1 + s_2 X_2 + \cdots + s_p X_p) = 0$$

بما أن A غير شاذة فإن $s_1 X_1 + s_2 X_2 + \cdots + s_p X_p = 0$. ولكن هذا مناقض لما فرضناه من كون X_i مستقلة خطياً وعلى ذلك فإن Y_i مستقلة خطياً

٤ — إذا علمت أن تحويلا خطياً $Y = AX$ يحول المتجه $X_1 = [1,0,1]'$ إلى $[2, 3, -1]'$ والمتجه $X_2 = [1, 1, 1]'$ إلى $[3, 0, -2]'$ والمتجه $X_3 = [1,2,-1]'$ إلى $[-2, 7, -1]'$ فأوجد أخيلة المتجهات E_1, E_2, E_3 واكتب معادلات هذا التحويل .

إذا فرضنا $aX_1 + bX_2 + cX_3 = E_1$ فإننا نجد $\begin{cases} a + b + c = 1 \\ -b + 2c = 0 \\ a + b - c = 0 \end{cases}$ ومنه $a = -\frac{1}{2}, b = 1, c = \frac{1}{2}$ أى أن

$E_1 = -\frac{1}{2}X_1 + X_2 + \frac{1}{2}X_3$ وخياله هو $Y_1 = -\frac{1}{2}[2,3,-1]' + [3,0,-2]' + \frac{1}{2}[-2,7,-1]' = [1,2,-2]'$ وبالمثل فإن خيال E_2 هو $Y_2 = [-1, 3, 1]'$ وخيال E_3 هو $Y_3 = [1, 1, 1]'$ وتكون معادلات التحويل الخطى المفروض هى :

$$Y = [Y_1, Y_2, Y_3]X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} X$$

٥ – إذا كان $Y_Z = AX_Z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} X_Z$ تحويلا خطياً بالنسبة للأساس Z المعرفة فى المسألة ١٢ من الفصل ١١ ، أوجد نفس التحويل $Y_W = BX_W$ بالنسبة للأساس W الوارد فى المسألة المذكورة ذاتها .

نستنتج من المسألة ١٢ من الفصل ١١ أن $X_W = PX_Z = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} X_Z$ ؛

$$X_Z = P^{-1}X_W = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} X_W = QX_W$$

و

$$Y_W = PY_Z = Q^{-1}AX_Z = Q^{-1}AQX_W = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 14 & -6 \\ 7 & 14 & 9 \\ 0 & -9 & 3 \end{bmatrix} X_W$$

مسائل اضافية

٦ – فى المسألة ١ بين (ا) أن التحويل الوارد فيها غير شاذ (ب) وأن التحويل $X = A^{-1}Y$ يحول متجهات أعمدة A إلى المتجهات الأولية .

٧ – مستخدماً التحويل الوارد فى المسألة ١ أوجد (ا) خيال $X = [1,1,2]'$ (ب) المتجه X الذى خياله $[-2,-5,-5]'$

الجواب (ا) $[8,5,11]'$ (ب) $[-3, -1,2]'$

٨ – أدرس تأثير التحويل $Y = I X$ و $Y = K I X$

٩ – عين التحويل الخطى الذى يحول E_1 إلى $[1,2,3]'$ و E_2 إلى $[3,1,2,]'$ و E_3 إلى $[2,-1,-1]'$ ثم بين أن هذا التحويل شاذ ويحول المتجهين المستقلين خطياً $[1,1,1]'$ و $[2,0,2,]'$ لمتجه واحد .

١٠ – افرض أن (12.1) غير شاذ ، وبين أنه إذا كانت المتجهات $X_1, X_2, \ldots, X_n$ مرتبطة خطياً فإن أخيلتها $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ تكون كذلك مرتبطة خطياً .

١١ – استخدم النظرية III لتبرهن أنه من خلال تحويل خطى غير شاذ ، لايتغير بعد فراغ إتجاهى .

إرشاد : اعتبر أخيلة أساس الفراغ $V_n^k(F)$

١٢ – بإستخدام التحويل الخطى $Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix} X.$ برهن (ا) أن هذا التحويل شاذ

(ب) إن أخيلة المتجهات المستقلة خطياً $X_1 = [1,1,1]'$ و $X_2 = [2,1,2]'$ و $X_3 = [1,2,3]'$ هى متجهات مرتبطة خطياً

(جـ) إن خيال $V_3(R)$ هو $V_3^2(R)$

١٣ – بإستخدام التحويل الخطى $Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} X$ بين أن (١) إن هذا التحويل شاذ . (ب) إن خيال كل متجه من $V_3^2(R)$ المولد بالمتجهين $[1,1,1]'$ و $[3,2,0]'$ ينتمى إلى الفراغ $V_3^1(R)$ المولد بـ $[5,7,5,]'$

١٤ – برهن النظرية : VII

إرشاد : لتكن X_i ، Y_i حيث $(i=1,2,...n)$ مجموعتى المتجهات المفروضتين وليكن $Z = AX$ التحويل الخطى الذى يحول المجموعة X_i إلى المجموعة E_i و $Y = B\ Z$ الذى يحول E_i إلى Y_i

١٥ – برهن أن المصفوفات المتشابهة تكون محدداتها متساوية .

١٦ – ليكن $Y = AX = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} X$ تحويلا خطياً بالنسبة للأساس E وبفرض اختيار الأساس الجديد $Z_1 = [1.1.0]'$, $Z_2 = [1.0.1]'$, $Z_3 = [1.1.1]$ نفرض المتجه $X = [1, 2, 3]'$ منسوباً للأساس E بين أن :

(١) إن $Y = [14, 10, 6]'$ خيال X من خلال هذا التحويل .

(ب) وإنه إذا نسبنا إلى الأساس الجديد فإن احداثيات X تكون $X_Z = [-2.-1.4]'$ وتكون احداثيات Y هى $Y_Z = [8,4,2]'$

(جـ) وإن $X_z = PY$ و $Y_z = PY$ حيث $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [Z_1, Z_2, Z_3]^{-1}$

(د) وإن $Y_Z = Q^{-1}AQX_Z$ حيث $Q = P^{-1}$.

١٧ – ليكن التحويل الخطى $Y_W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} X_W$ منسوباً للأساس $W_1 = [0,-1,2]'$ ، $W_2 = [4,1,0]'$ $W_3 = [-2,0,-4]'$. اكتب تمثيلا منسوباً للأساس Z حيث

الجـــواب : $Z_1 = [1.-1.1]'$, $Z_2 = [1.0.-1]'$, $Z_3 = [1.2.1]'$.

١٨ – إذا كانت فى تحويل خطى $Y = AX$ المصفوفة A شاذة ، فإن الفراغ المنعدم للمصفوفة A هو فراغ إتجاهى يتحول كل متجه منه وفوق هذا التحويل إلى المتجه الصفرى . عين الفراغ الصفرى (المنعدم) للتحويلات :

(١) الوارد فى المسألة ١٢ (ب) الوارد فى المسألة ١٣ (جـ) $Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} X.$

الجواب : (ا) $V_3^1\ (R)$ المولد بـ $[1,-1,1]'$

(ب) $V_3^1\ (R)$ المولد بـ $[2,1,-1]'$

(جـ) $V_3^2\ (R)$ المولد بـ : $[2,-1,0]'$ و $[3,0,-1]'$

١٩ – إذا حول $Y=AX$ كل متجه من الفراغ الإتجاهى V_n^h إلى متجه من هذا الفراغ ذاته ، فإننا نقول عن الفراغ V_n^h **إنه فراغ لامتغير للتحويل** . بين أنه فى الفراغ الحقيقى $V_3\ (R)$ بتطبيق التحويل الخطى .

(ا) $Y=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}X$. الفراغ V_3^1 المولد بـ $[1,-1,0]'$ والفراغ V_3^1 المولد بـ $[2,-1,-2]'$ و V_3^1 المولد بـ $[1,-1,-2]'$ هى فراغات إتجاهية لا متغيرة .

(ب) $Y=\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}X$. الفراغ V_3^1 والمولد بـ $[1,1,1]'$ والفراغ V_3^2 المولد بالمتجهين $[1,0,-1]'$ و $[2,-1,0]'$ هما فراغان لا متغيران للتحويل المفروض . (لاحظ أن خيال كل متجه من V_3^2 هو هذا المتجه نفسه) .

(جـ) $Y=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 4 & -6 & 4\end{bmatrix}X$. الفراغ V_4^1 المولد بـ $[1,1,1,1]'$ هو فراغ لامتغير للتحويل المفروض .

٢٠ – اعتبر التحويل الخطى $Y=PX$: $y_i=x_{j_i}$ حيث $(i=1,2,\dots,n)$ وفيه $j_1,j_2,\dots j_n$ تبديل لـ $1,2,\dots,n$

(ا) صف **مصفوفة التبديل** P .

(ب) برهن أنه يوجد $n!$ مصفوفة تبديل من الدرجة n .

(جـ) برهن أنه إذا كان كل من P_1 و P_2 مصفوفتى تبديل فإن $P_3=P_1P_2$ و $P_4=P_2P_1$ هما مصفوفتا تبديل أيضاً .

(د) برهن أنه إذا كانت P مصفوفة تبديل فإن P' مصفوفة تبديل و $PP'=I$

(هـ) برهن أنه يمكن التعبير عن كل مصفوفة تبديل P كحاصل ضرب مصفوفات أعمدة أولية $K_{12}, K_{23}, \dots, K_{n-1,n}$

(و) اكتب $P=[E_{i_1}, E_{i_2}, \dots E_{i_n}]$ حيث $i_1, i_2, \dots, i_n$ تبديل لـ $1,2,\dots n$ وحيث E_{i_j} المتجهات الأولية ذات الـ n مركبة ، أوجد قاعدة (غير القاعدة $P^{-1}=P'$) لكتابة P^{-1} . مثال ذلك ، عندما يكون $n=4$ وبـ $P=[E_3, E_1, E_4, E_2]$; $P^{-1}=[E_2, E_4, E_1, E_3]$ وإذا كان $P=[E_4, E_2, E_1, E_3]$. فإن $P^{-1}=[E_3, E_2, E_4, E_1]$.

الفصل الثالث عشر

المتجهات على الحقل الحقيقى

حاصل الضرب الداخلى :

فى هذا الفصل نعتبر كل متجه متجها حقيقياً كما نعتبر $V_n(R)$ الفراغ الإتجاهى لكل المتجهات الحقيقية ذات الـ n مركبة .
إذا كان $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]'$ ، $Y = [y_1, y_2, \ldots, y_n]'$ متجهين من $V_n(R)$ فإننا نعرف حاصل ضربهما الداخلى بأنه العدد

$$X \cdot Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \qquad (13.1)$$

مثال ١ :

للمتجهات $X_1 = [1,1,1]'$ ، $X_2 = [2,1,2]'$ ، $X_3 = [1,-2,1]'$: يكون

(أ) $X_1 \cdot X_2 = 1\cdot 2 + 1\cdot 1 + 1\cdot 2 = 5$

(ب) $X_1 \cdot X_3 = 1\cdot 1 + 1(-2) + 1\cdot 1 = 0$

(جـ) $X_1 \cdot X_1 = 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 3$

(د) $X_1 \cdot 2X_2 = 1\cdot 4 + 1\cdot 2 + 1\cdot 4 = 10 = 2(X_1 \cdot X_2)$

ملاحظة :

يعرف حاصل الضرب الداخلى فى أغلب الأحيان بالشكل

$$X \cdot Y = X'Y = Y'X \qquad (13.1')$$

إن إستعمال الرمز $X'Y$ و $Y'X$ مفيد ولكن $X'Y$ و $Y'X$ مصفوفتان من الدرجة 1×1 بينما $X.Y$ هو عنصر المصفوفة . سنستخدم $(13.1')$ فى هذا الفصل وفقاً لهذا المفهوم . يستعمل مؤلفون آخرون الرمز $X|Y$ بدلا من $X.Y$ فى تحليل المتجهات يسمى حاصل الضرب الداخلى **الضرب القياسى** .

إن قواعد حاصل الضرب الداخلى بادية الوضوح

$$(13.2) \quad \begin{aligned} &(\text{أ}) \quad X_1 \cdot X_2 = X_2 \cdot X_1, \quad X_1 \cdot kX_2 = k(X_1 \cdot X_2) \\ &(\text{ب}) \quad X_1 \cdot (X_2 + X_3) = (X_2 + X_3) \cdot X_1 = X_1 \cdot X_2 + X_1 \cdot X_3 \\ &(\text{جـ}) \quad (X_1 + X_2) \cdot (X_3 + X_4) = X_1 \cdot X_3 + X_1 \cdot X_4 + X_2 \cdot X_3 + X_2 \cdot X_4 \end{aligned}$$

المتجهات المتعامدة :

نقول عن متجهين X و Y من $V_n(R)$ إنهما متعامدان فيما إذا كان حاصل ضربهما الداخلى مساويا الصفر . إن المتجهين X_1 و X_3 من المثال ١ متعامدان .

طول المتجه : X من $V_n(R)$ الممثل بـ $\|X\|$ يعرف بالجذر التربيعى لحاصل الضرب الداخلى للمتجه X بالمتجه X أى :

$$\|X\| = \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \qquad (13.3)$$

مثال ٢ :

ينتج من (جـ) من المثال ١ أن $\|X_1\| = \sqrt{3}$

أنظـــر المسألتين ١ — ٢

بإستخدام (13.1) و (13.1) فمن الممكن برهان :

$$X \cdot Y = \tfrac{1}{2}\{\|X+Y\|^2 - \|X\|^2 - \|Y\|^2\} \qquad (13.4)$$

يدعى المتجه X الذى طوله $\|X\| = 1$ متجه الوحدة إن المتجهات الأولية E_i أمثلة من متجهات الوحدة .

متباينة شـــوارز : إذا كان X و Y متجهين من $V_n(R)$ فإنهما يحققان :

$$|X \cdot Y| \leq \|X\| \cdot \|Y\| \qquad (13.5)$$

أى أن القيمة العددية لحاصل الضرب الداخلى لمتجهين حقيقيين لاتزيد عن حاصل ضرب طولى هذين المتجهين .

أنظـــر المسألة ٣

المتباينة المثلثية :

إذا كان X و Y متجهين من الفراغ $V_n(R)$ فإن :

$$\|X+Y\| \leq \|X\| + \|Y\| \qquad (13.6)$$

المتجهات والفراغات المتعامدة :

إذا كان $X_1, X_2, \ldots, X_m$ هى m متجها حيث $n \geq m$ غير صفرية متعامدة كل منها على الأخرى وإذا كان $c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_mX_m = 0$, فإنه لقيم $i = 1, 2, \ldots, m$ تتحقق العلاقة $(c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_mX_m) \cdot X_i = 0$ وحيث أن ذلك يتطلب أن $C_i = 0$ لقيم $i = 1, 2, \ldots, m$ فإنه يكون :

I إن أى مجموعة مكونة من m حيث $n \geq m$ متجها ذا n مركبة لايساوى أى واحد منها الصفر ومتعامدة مثنى ، هى مجموعة مستقلة خطياً وتولد فراغاً إتجاهياً $V_n^m(R)$. نقول عن متجه Y أنه متعامد مع فراغ إتجاهى $V_n^m(R)$ فيما إذا كان متعامداً مع كل متجه من هذا الفراغ .

II إذا كان متجه Y متعامداً مع كل متجه من المتجهات ذات الـ n مركبة $X_1, X_2, \ldots, X_m$ فإنه يكون متعامداً مع الفراغ الإتجاهى المولد بهذه المتجهات .

أنظـــر المسألة ٤

III إذا كان $V_n^h(R)$ فراغاً جزئياً من $V_n^k(R)$ حيث $k > h$ فإنه يوجد على الأقل ، متجه واحد V من $V_n^k(R)$ متعامد مع $V_n^h(R)$.

أنظـــر المسألة ٥

بما أن المتجهات المتعامدة مثنى هى متجهات مستقلة خطياً . فإن فراغاً إتجاهياً $V_n^m(R)$ حيث $0 < m$ لايمكن أن يحوى أكثر من m من المتجهات المتعامدة مثنى . لنفرض أننا وجدنا r حيث $m > r$ متجها متعامدة مثنى من الفراغ $V_n^m(R)$. إن هذه المتجهات تولد فراغاً جزئياً $V_n^r(R)$ من $V_n^m(R)$ ووفقاً إلى النظرية III فإنه يوجد على الأقل متجه واحـد من $V_n^m(R)$ متعامد مع الفراغ $V_n^r(R)$. فنكون قد حصلنا الآن على ($r + 1$) متجها متعامدة مثنى من $V_n^m(R)$ وإذا كررنا هذه الحجة فإننا نكون قد برهنا :

IV يحوى كل فراغ إتجاهى $V_n^m(R)$ حيث $0 < m$ على m ، وليس أكثر من ذلك ، من المتجهات المتعامدة مثنى .

نقول عن فراغين إتجاهيين إنهما متعامدان ، فيما إذا كان كل متجه من أحدهما متعامد مع كل متجه من الآخر ، . مثال ذلك إن الفراغ المولد بالمتجهين $X_1 = [1,0,0,1]'$ و $X_2 = [0,1,1,0]'$ متعامد مع الفراغ المولد بالمتجهين $X_3 = [1,0,0{-1}]'$ و $X_4 = [0,1{-1},0]$ وذلك لأن $(aX_1 + bX_2) \cdot (cX_3 + dX_4) = 0$ لكل قيم a, b, c, d .

V إن مجموعة كل المتجهات المتعامدة مع كل متجه من الفراغ $Y_n^k(R)$ تؤلف فراغاً إتجاهياً وحيداً $V_n^{n-k}(R)$.

أنظـــر المسألة ٦

يمكننا أن نزامل أى متجه $X \neq O$ بمتجه فريد (وحيد) U نحصل عليه بقسمة مركبات X على $||X||$. تسمى هذه العملية التعيير . أى لكى نجعل متجها عياريا مثل $X = [2,4,4]'$ نقسم كل مركبة من مركباته على $||X|| = \sqrt{4+16+16} = 6$ فنجد متجه الوحدة $[1/3 , 2/3 , 2/3]'$.

يسمى أساس الفراغ الإتجاهى $V_n^m(R)$ المكون من متجهات متعامدة مثنى . **أساس متعامد** لهذا الفراغ . وإذا كانت متجهات الأساس المتعامدة متجهات وحدة فإن هذا الأساس يدعى **الأساس العيارى المتعامد** . إن المتجهات الأولية أسس متعامدة عيارية للفراغ .

أنظر المسألة ٧

طريقة جرام — شميت للتعامد : لنفرض أن $X_1 , X_2 , \ldots , X_m$ أساس لـ $V_n^m(R)$. عرف

$$Y_1 = X_1$$

$$Y_2 = X_2 - \frac{Y_1 \cdot X_2}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1$$

$$Y_3 = X_3 - \frac{Y_2 \cdot X_3}{Y_2 \cdot Y_2} Y_2 - \frac{Y_1 \cdot X_3}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1$$

. . . .

$$Y_m = X_m - \frac{Y_{m-1} \cdot X_m}{Y_{m-1} \cdot Y_{m-1}} Y_{m-1} - \cdots - \frac{Y_1 \cdot X_m}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1$$

وهكذا تكون متجهات الوحدة $G_i = \frac{Y_i}{||Y_i||}$ ، حيث $(i = 1, 2 \ldots m)$ متعامدة مثنى وتكون أساساً عيارياً متعامداً لـ $V_n^m(R)$.

مثال ٣ : كون ، مستخدماً طريقة جرام - شميت ، أساساً متعامداً لـ $V_3(R)$ إذا أعطيت الأساس
$X_1 = [1,1,1]'$, $X_2 = [1,-2,1]'$, $X_3 = [1,2,3]'$.

$$Y_1 = X_1 = [1,1,1]' \qquad \text{(i)}$$

$$Y_2 = X_2 - \frac{Y_1 \cdot X_2}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1 = [1,-2,1]' - \frac{0}{3} Y_1 = [1,-2,1]' \qquad \text{(ii)}$$

$$Y_3 = X_3 - \frac{Y_2 \cdot X_3}{Y_2 \cdot Y_2} Y_2 - \frac{Y_1 \cdot X_3}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1 = [1,2,3]' - \frac{0}{6} Y_2 - \frac{6}{3}[1,1,1]' = [-1,0,1]' \qquad \text{(iii)}$$

إن المتجهات

$$G_1 = \frac{Y_1}{||Y_1||} = [1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]',$$

$$G_2 = \frac{Y_2}{||Y_2||} = [1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}]' \quad \text{و} \quad G_3 = \frac{Y_3}{||Y_3||} = [-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}]'$$

تكون أسساً متعامدة عيارية لـ $V_3(R)$. كل متجه G_i منها هو متجه وحدة وكل حاصل ضرب $G_i \cdot G_j = 0$.
لاحظ فى هذه الحالة أن $Y_2 = X_2$ لأن X_1 و Y_2 هما متجهان متعامدان .

أنظر المسألتين ٨ — ٩

لنفرض أن $X_1 , X_2 , \ldots , X_m$ أساس للفراغ $V_n^m(R)$ ولنفرض أن المتجهات $X_1, X_2, \ldots, X_s$ ، حيث $(m > s \geq 1)$ متعامدة مثنى . إذن يمكننا ، باستخدام طريقة جرام - شميت ، إيجاد أساس متعامد $Y_1 , Y_2 , \ldots , Y_m$ لهذ الفراغ ومن السهل أن نبرهن أن $Y_i = X_i$ حيث $(i = 1, 2, \ldots, s)$ وهكذا نجد .

٧. إذا كانت المتجهات $X_1, X_2, \ldots, X_s$ ، حيث $(m > s \geq 1)$ متجهات وحدة متعامدة مثنى من $V_n^m(R)$ فإنه يوجد متجهات وحدة $X_{s+1} , X_{s+2} , \ldots , X_m$ من هذا الفراغ بحيث تصبح المجموعة $X_1 , X_2 , \ldots , X_m$ أساساً متعامدا عيارياً

مصفوفة جرام (الجراميان) : لنفرض أن $X_1 , X_2 , \ldots , X_p$ مجموعة من المتجهات الحقيقية ذات الـ n مركبة ونعرف مصفوفة جرام بالشكل :

$$G = \begin{bmatrix} X_1 \cdot X_1 & X_1 \cdot X_2 & \ldots & X_1 \cdot X_p \\ X_2 \cdot X_1 & X_2 \cdot X_2 & \ldots & X_2 \cdot X_p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ X_p \cdot X_1 & X_p \cdot X_2 & \ldots & X_p \cdot X_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1' X_1 & X_1' X_2 & \ldots & X_1' X_p \\ X_2' X_1 & X_2' X_2 & \ldots & X_2' X_p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ X_p' X_1 & X_p' X_2 & \ldots & X_p' X_p \end{bmatrix} \qquad (13.8)$$

من الواضح أن هذه المتجهات تكون متعامدة مثنى فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) المصفوفة G قطرية .

فى المسألة ١٤ من الفصل ١٧ سنبرهن :

VII. لمجموعة المتجهات الحقيقية ذات الـ n مركبة $X_1, X_2, \ldots, X_p$ يكون $|G| \geq 0.$ وتكون المساواة صحيحة فيما إذا كانت (وإذا فقط) هذه المتجهات مرتبطة خطياً .

المصفوفات المتعامدة : نقول عن مصفوفة A إنها متعامدة فيما إذا كان :

$$AA' = A'A = I \qquad (13.9)$$

أى إذا كان

$$A' = A^{-1} \qquad (13.9')$$

يتضح من العلاقة (13.9) أن متجه أعمدة (صفوف) مصفوفة متعامدة A هى متجهات وحدة متعامد مثنى .

مثال ٤ : ينتج عن المثال ٣ أن المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ متعامدة

ينتج عما سبق مباشرة مايلى :

VIII. إذا كانت المصفوفة A المربعة ، الحقيقية ذات الدرجة n . متعامدة فإن أعمدتها (صفوفها) تكون أساساً عيارياً متعامداً لـ $V_n (R)$ والعكس صحيح .

IX. إن معكوس ومنقول مصفوفة متعامدة هما مصفوفتان متعامدتان .

X. إن حاصل ضرب مصفوفتين متعامدتين أو أكثر ، هو مصفوفة متعامدة .

XI. يساوى محددة مصفوفة متعامدة ± 1

التحويلات المتعامدة ليكن

$$Y = AX \qquad (13.10)$$

تحويلا خطيـــاً معرفاً على $V_n (R)$ ولنرمز لخيـــالى المتجهين X_1 و X_2 من هـــذا الفراغ بالرمزين Y_1 و Y_2 على الترتيب نستنتج من العلاقة (13.4) أن

$$X_1 \cdot X_2 = \tfrac{1}{2}\{ \|X_1 + X_2\|^2 - \|X_1\|^2 - \|X_2\|^2 \}$$

و

$$Y_1 \cdot Y_2 = \tfrac{1}{2}\{ \|Y_1 + Y_2\|^2 - \|Y_1\|^2 - \|Y_2\|^2 \}$$

إذا قارنا بين الأطراف اليمنى والأطراف اليسرى ، فإننا نرى أنه إذا كانت العلاقة (١٣-١٠) تحافظ على الأطوال فإنها تحافظ على حاصل الضرب الداخلى والعكس بالعكس . أى :

XII. يحافظ التحويل الخطى على الأطوال فيما إذا كان (وإذا كان فقط) محافظاً على حاصل الضرب الداخلى .

نقول عن تحويل خطى $Y = A X$ إنه متعامد فيما إذا كانت مصفوفته A متعامدة . سنبرهن فى المسألة ١٠ :

XIII. يحافظ تحويل خطى على الأطوال فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) مصفوفته متعامدة .

مثال ٥ : إن التحويل الخطى $Y = AX = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} X$ متعامد وإن خيال $X = [a, b, c]'$ هو :

$$Y = \left[\frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{b}{\sqrt{6}} - \frac{c}{\sqrt{2}},\ \frac{a}{\sqrt{3}} - \frac{2b}{\sqrt{6}},\ \frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{b}{\sqrt{6}} + \frac{c}{\sqrt{2}}\right]'$$

ولكل من هذين المتجهين طول واحد يساوى $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

XIV. وإذا كان (13.10) تحويلا للاحداثيات من الأساس E إلى الأساس Z فإن الأساس Z يكون عياريا متعامداً فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) المصفوفة A متعامدة .

مســائل محلولة

١ – إذا كان $X_1 = [1, 2, 3]'$ و $X_2 = [2, -3, 4]'$ أوجد :

(ا) حاصل ضربهما الداخلى (ب) طول كل منهما .

$$X_1 \cdot X_2 = X_1'X_2 = [1,2,3]\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} = 1(2) + 2(-3) + 3(4) = 8 \quad (ا)$$

$$\|X_1\|^2 = X_1 \cdot X_1 = X_1'X_1 = [1,2,3]\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 14 \quad \text{and} \quad \|X_1\| = \sqrt{14} \quad (ب)$$

$$\|X_2\|^2 = 2(2) + (-3)(-3) + 4(4) = 29 \quad و \quad \|X_2\| = \sqrt{29}$$

٢ – (ا) برهن أن المتجهين $X = [1/3, -2/3, -2/3]'$ و $Y = [2/3, -1/3, 2/3]'$ متعامدان .

(ب) أوجد متجها Z متعامداً مع كل من X و Y .

(ا) $X \cdot Y = X'Y = [1/3, -2/3, -2/3]\begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = 0$ وهذا يبرهن على أن المتجهين متعامدان .

(ب) لنكتب $[X, Y, 0] = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ -2/3 & -1/3 & 0 \\ -2/3 & 2/3 & 0 \end{bmatrix}$ ولنحسب المعاملات المرافقة $-2/3, -2/3, 1/3$ لعناصر العمود الصفرى .

من (3.11) نجد أن $Z = [-2/3, -2/3, 1/3]'$ متعامد مع كل من X و Y

٣ – برهن متباينة شوارز . إذا كان X و Y متجهين من $V_n(R)$ فإن $|X \cdot Y| \le \|X\| \cdot \|Y\|$.

من الواضح ، أن هذه النظرية صحيحة إذا كان X أو Y المتجه الصفرى . نفرض أن المتجهين X و Y ليسا متجهات صفرية . إذا كان a أى عدد حقيقى فإن :

$$\begin{aligned}
\|aX+Y\|^2 &= (aX+Y)\cdot(aX+Y) \\
&= [ax_1+y_1, ax_2+y_2, \dots, ax_n+y_n]\cdot[ax_1+y_1, ax_2+y_2, \dots, ax_n+y_n]' \\
&= (a^2x_1^2 + 2ax_1y_1 + y_1^2) + (a^2x_2^2 + 2ax_2y_2 + y_2^2) + \cdots + (a^2x_n^2 + 2ax_ny_n + y_n^2) \\
&= a^2\|X\|^2 + 2aX\cdot Y + \|Y\|^2 \ge 0
\end{aligned}$$

ولكن من المعلوم أن كثيرة حدود من الدرجة الثانية بالنسبة فى a ، يكون أكبر أو يساوى الصفر لكل قيمة حقيقية لـ a فيما إذا كان (وإذا كان فقط) مميزه أصغر أو يساوى الصفر أى :

$$4(X\cdot Y)^2 - 4\|X\|^2\cdot\|Y\|^2 \le 0$$

ومنه نجـــد

$$|X\cdot Y| \le \|X\|\cdot\|Y\|$$

٤ - برهن أنه إذا كان المتجه Y متعامداً مع كل من المتجهات $X_1, X_2, \dots, X_m$ ذات الـ n مركبة ، فإنه يكون متعامداً مع الفراغ المولد بهذه المتجهات . يمكن كتابة أى متجه فى الفراغ المولدبالمتجهات المفروضة بالشكل $a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_mX_m$ ويكون :

$$(a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_mX_m)\cdot Y = a_1X_1\cdot Y + a_2X_2\cdot Y + \cdots + a_mX_m\cdot Y = 0$$

وبما أن $X_i\cdot Y = 0,\ (i = 1,2,\dots,m)$. فإن Y يكون متعامداً مع كل متجه من الفراغ المولد بالمتجهات ويكون ، بالتعريف ، متعامداً مع هذا الفراغ . وعلى وجه الخصوص إذا كان Y متعامداً مع كل متجه من أساس فراغ إتجاهى فإنه يكون متعامداً مع هذا الفراغ .

٥ - برهن أنه إذا كان $V_n^h(R)$ فراغاً جزئياً من $V_n^k(R)$ حيث $h < k$ فإنه يوجد على الأقل ، متجه واحد X من $V_n^k(R)$ متعامد مع $V_n^h(R)$

لتكن $X_1, X_2, \dots, X_h$ أساساً لـ $V_n^h(R)$ ولتكن X_{h+1} متجها من $V_n^k(R)$ غير واقع فى $V_n^h(R)$ واعتبر المتجه :

$$X = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_hX_h + a_{h+1}X_{h+1} \qquad \text{(i)}$$

إن شرط تعامد المتجه X مع كل من $X_1, X_2, \dots, X_h$ يتكون من h معادلة خطية متجانسة .

$$a_1X_1\cdot X_1 + a_2X_2\cdot X_1 + \cdots + a_hX_h\cdot X_1 + a_{h+1}X_{h+1}\cdot X_1 = 0$$
$$a_1X_1\cdot X_2 + a_2X_2\cdot X_2 + \cdots + a_hX_h\cdot X_2 + a_{h+1}X_{h+1}\cdot X_2 = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_1X_1\cdot X_h + a_2X_2\cdot X_h + \cdots + a_hX_h\cdot X_h + a_{h+1}X_{h+1}\cdot X_h = 0$$

ذات الـ $(h+1)$ مجهولا $a_1, a_2, \dots, a_{h+1}$. من النظرية IV من الفصل العاشر ، يكون لهذه المجموعة حل غير تافه . عندما نعوض هذه القيم فى (i) فإننا نحصل على متجه X غير صفرى (لماذا ؟) متعامد مع أساس الفراغ الإتجاهى $V_n^h(R)$ أى متعامد مع هذا الفـــراغ .

٦ - برهن أن مجموع كل المتجهات المتعامدة مع كل متجه من فراغ معين $V_n^k(R)$ يكون فراغاً إتجاهياً وحيداً $V_n^{n-k}(R)$

لتكن $X_1, X_2, \dots, X_k$ أساساً للفراغ الإتجاهى $V_n^k(R)$. إن المتجه X ذا الـ n مركبة المتعامد مع كل X_i يحقق مجموعة المعادلات المتجانسة .

$$X_1\cdot X = 0,\ X_2\cdot X = 0,\ \dots,\ X_k\cdot X = 0 \qquad \text{(i)}$$

بما أن X_i هى مجموعة مستقلة خطياً فإن رتبة مصفوفة معاملات مجموعة المعادلات (i) تساوى k ، وينتج عن ذلك أنه يوجد $(n-k)$ حلا (متجها) مستقلة خطياً تولد الفراغ $V_n^{n-k}(R)$ (أنظر النظرية VI الفصل ١٠) .

بما أن تقاطع الفراغين $V_n^k(R)$ و $V_n^{n-k}(R)$ يساوى الفراغ الصفرى وأن مجموع هذين الفراغين يساوى $V_n(R)$ فإن الفراغ الموجود وحيد .

٧ - أوجد أساس عيارية متعامدة للفراغ $V_3(R)$ إذا أعطيت : $X = [1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}]'$.

من الملاحظ أن X متجه وحدة . باختيار $Y = [1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}]'$ متجه وحدة آخر بحيث يكون $X\cdot Y = 0$. وكما فى (ا) من المسألة ٢ نجد $Z = [1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]'$ الذى يتمم المجموعة المطلوبة .

٨ — استنتج معادلات جرام – شميت (13.7)

لتكن $X_1, X_2, \ldots, X_m$ أساساً للفراغ $V_n^m(R)$ ولنرمز بالرموز $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ لمجموعة المتجهات المتعامدة مثنى التى يراد إيجادها .

(أ) لنأخذ $Y_1 = X_1$.

(ب) لنأخذ $Y_2 = X_2 + aY_1$ وبما أنه يلزم أن يكون Y_1 و Y_2 متعامدين مثنى أى :

$$Y_1 \cdot Y_2 = Y_1 \cdot X_2 + Y_1 \cdot aY_1 = Y_1 \cdot X_2 + aY_1 \cdot Y_1 = 0$$

ومنه $a = -\dfrac{Y_1 \cdot X_2}{Y_1 \cdot Y_1}$ أى $Y_2 = X_2 - \dfrac{Y_1 \cdot X_2}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1$.

(جـ) لنأخذ $Y_3 = X_3 + aY_2 + bY_1$ وبما أن المتجهات الثلاث Y_1, Y_2, Y_3 يجب أن تكون متعامدة كل منها على الأخرى (مثنى) فإنه يلزم أن يكون .

$$Y_1 \cdot Y_3 = Y_1 \cdot X_3 + aY_1 \cdot Y_2 + bY_1 \cdot Y_1 = Y_1 \cdot X_3 + bY_1 \cdot Y_1 = 0$$

و

$$Y_2 \cdot Y_3 = Y_2 \cdot X_3 + aY_2 \cdot Y_2 + bY_2 \cdot Y_1 = Y_2 \cdot X_3 + aY_2 \cdot Y_2 = 0$$

ومنه $b = -\dfrac{Y_1 \cdot X_3}{Y_1 \cdot Y_1}$ ، $a = -\dfrac{Y_2 \cdot X_3}{Y_2 \cdot Y_2}$ و $Y_3 = X_3 - \dfrac{Y_2 \cdot X_3}{Y_2 \cdot Y_2} Y_2 - \dfrac{Y_1 \cdot X_3}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1$.

(د) استمر فى هذه العملية حتى تحصل على Y_m .

٩ — أوجد أساس متعامدة عيارية لـ V_3 فيما إذا أعطيت الأساس $X_1 = [2,1,3]'$, $X_2 = [1,2,3]'$ و $X_3 = [1,1,1]'$.

لنأخذ $Y_1 = X_1 = [2,1,3]'$. فنجد :

$$Y_2 = X_2 - \frac{Y_1 \cdot X_2}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1 = [1,2,3]' - \frac{13}{14}[2,1,3]' = [-6/7, 15/14, 3/14]'$$

$$Y_3 = X_3 - \frac{Y_2 \cdot X_3}{Y_2 \cdot Y_2} Y_2 - \frac{Y_1 \cdot X_3}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1$$

$$= [1,1,1]' - \frac{2}{9}\left[-\frac{6}{7}, \frac{15}{14}, \frac{3}{14}\right]' - \frac{3}{7}[2,1,3]' = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right]'$$

اجعل المتجهات Y عيارية فنحصل على $[2/\sqrt{14}, 1/\sqrt{14}, 3/\sqrt{14}]'$, $[-4/\sqrt{42}, 5/\sqrt{42}, 1/\sqrt{42}]'$ $[1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}]'$ كأساس عيارى متعامد المطلوب .

١٠ — برهن أن تحويلا خطياً يحافظ على الأطوال فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) مصفوفته متعامدة .

ليكن Y_1 و Y_2 خيالى X_1 و X_2 على الترتيب وفق التحويل الخطى $Y = AX$

فلنفرض أن A متعامدة أى $A'A = I$ فيكون عندها :

$$\text{(i)} \quad Y_1 \cdot Y_2 = Y_1'Y_2 = (X_1'A')(AX_2) = X_1'X_2 = X_1 \cdot X_2$$

ومن النظرية XII نجد أن الأطوال محفوظة

على العكس ، لنفرض أن الأطوال محفوظة (وكذلك حاصل الضرب الداخلى) فيكون :

$$Y_1 \cdot Y_2 = X_1'(A'A)X_2 = X_1'X_2. \qquad A'A = I$$

أى أن A مصفوفة متعامدة .

مسائل اضافية

١١ – إذا أعطيت المتجهات $X_1 = [1,2,1]'$, $X_2 = [2,1,2]'$, $X_3 = [2,1,-4]'$ فأوجد :

(ا) حاصل الضرب الداخلى لكل زوج منها .

(ب) طول كل واحد منها .

(جـ) متجها متعامداً مع زوج المتجهات X_1 و X_2 وآخر مع زوج المتجهات X_1 و X_3

الجـــواب (ا) $6, 0, -3$ (ب) $\sqrt{6}, 3, \sqrt{21}$ (جـ) $[1,0,-1]', [3,-2,1]'$

١٢ – استعمل متجهات اختيارية من $V_3(R)$ وحقق العلاقات (13.2)

١٣ – برهن العـــلاقة (13.4)

١٤ – لنفرض أن المتجهين $X = [1,2,3,4]'$ و $Y = [2,1,-1,1]'$ أساساً للفراغ $V_4^2(R)$ وأن $Z = [4,2,3,1]'$ واقع فى فراغ $V_4^3(R)$ يحوى X و Y

(ا) برهن أن Z غير منتمٍ إلى $V_4^2(R)$.

(ب) اكتب $W = aX + bY + cZ$ وأوجد متجها W من $V_4^3(R)$ متعامداً مع كل من X و Y .

١٥ – (ا) برهن أن متجها من $V_n(R)$ يكون متعامداً مع نفسه فيما إذا كان (إذا كان فقط) . المتجه الصفرى .

(ب) برهن أنه إذا كانت X_1, X_2, X_3 مجموعة من المتجهات المرتبطة خطياً وغير صفرية وذات n مركبة وإذا كان $X_1 \cdot X_2 = X_1 \cdot X_3 = 0$, فإن المتجهين X_2 و X_3 يكونان مرتبطين خطياً .

١٦ – برهن أن متجها X يكون متعامدا مع كل متجه من $V_n^m(R)$ إذا كان (وإذا كان فقط) متعامداً مع كل متجه من أساس هذا الفراغ .

١٧ – برهن أنه إذا كان الفراغان الإتجاهيان $V_n^h(R)$ و $V_n^k(R)$ متعامدين فإن فراغ تقاطعهما هو $V_n^o(R)$.

١٨ – برهن المتباينة المثلثية .

إرشاد : برهن أن $\|X+Y\|^2 \le (\|X\| + \|Y\|)^2$, مستخدماً من متباينة شوارز .

١٩ – برهن أن $\|X+Y\| = \|X\| + \|Y\|$ إذا كان (وإذا كان فقط) X و Y مرتبطين خطياً .

٢٠ – اجعل المتجهات الواردة فى المسألة ١١ عيارية .

الجـــواب : $[1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}]'$, $[2/3, 1/3, 2/3]'$, $[2/\sqrt{21}, 1/\sqrt{21}, -4/\sqrt{21}]'$

٢١ – برهن أن المتجهات X و Y و Z الواردة فى المسألة ٢ تؤلف أساساً عيارياً متعامداً لـ $V_3(R)$.

٢٢ – (ا) برهن أنه إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_m$ مستقلة خطياً فإن متجهات الوحدة التى تنتج عن جعل هذه المتجهات عيارية تكون مستقلة خطياً .

(ب) برهن أنه إذا كانت المتجهات الواردة فى (ا) غير صفرية ومتعامدة كل منها على الأخرى فإن نفس الحال تكون بالنسبة لمتجهات الوحدة التى نحصل عليها بجعلها عيارية .

٢٣ – برهن: (أ) إذا كانت A متعامدة و $|A| = I$ فإن كل عنصر من A يساوى معاملة المرافق فى $|A|$.

(ب) إذا كانت A متعامدة و $|A| = -1$ فإن كل عنصر من A يساوى سالب المعاملة المرافق $|A|$.

٢٤ – برهن النظريات VIII ، XI ، X ، XI .

٢٥ – برهن أنه إذا كانت A و B تبديليتين وكانت C متعامدة ، فإن $C'AC$ و $C'BC$ تبديليتان .

٢٦ – برهن أن AA' (أو $A'A$) حيث A مصفوفة مربعة من الدرجة n ، تكون مصفوفة قطرية فيما إذا كانت (وإذا كانت) صفوف (أو أعمدة) A متعامدة .

٢٧ – برهن أنه إذا كان X و Y متجهين من n مركبة فإن المصفوفة $XY' + YX'$ تكون متماثلة .

٢٨ – برهن أنه إذا كان X و Y متجهين من n مركبة وكانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n فإن $X.(AY) = (A'X)Y$

٢٩ – برهن أنه إذا كانت المجموعة $X_1, X_2, \dots, X_n$ أساساً عيارياً متعامداً وإذا كان $X = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i$ ،

فإن :

(أ) $X \cdot X_i = c_i, \ (i = 1, 2, \dots, n)$; (ب) $X \cdot X = c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2$.

٣٠ – أوجد أساساً عيارياً متعامداً للفراغ $V_3(R)$ فيما إذا أعطيت (أ) $X_1 = [3/\sqrt{17}, -2/\sqrt{17}, 2/\sqrt{17}]$

(ب) $[3,0,2]'$

الجـــواب (أ)

X_1, $[0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]'$, $[-4/\sqrt{34}, -3/\sqrt{34}, 3/\sqrt{34}]'$

(ب)

$[3/\sqrt{13}, 0, 2/\sqrt{13}]'$, $[2/\sqrt{13}, 0, -3/\sqrt{13}]'$, $[0, 1, 0]'$

٣١ – كون أساساً عيارياً متعامداً لـ $V_3(R)$ بطريقة جرام – شميت مستخدماً مجموعة المتجهات المرتبة التالية :

(أ)

$[1, -1, 0]'$, $[2, -1, -2]'$, $[1, -1, -2]'$

(ب)

$[1, 0, 1]'$, $[1, 3, 1]'$, $[3, 2, 1]'$

(ج)

$[2, -1, 0]'$, $[4, -1, 0]'$, $[4, 0, -1]'$

الجـــواب : (أ)

$[\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0]'$, $[\sqrt{2}/6, \sqrt{2}/6, -2\sqrt{2}/3]'$, $[-2/3, -2/3, -1/3]'$

(ب)

$[\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{2}]'$, $[0, 1, 0]'$, $[\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, -\frac{1}{2}\sqrt{2}]'$

(ج)

$[2\sqrt{5}/5, -\sqrt{5}/5, 0]'$, $[\sqrt{5}/5, 2\sqrt{5}/5, 0]'$, $[0, 0, -1]'$

٣٢ – أوجد أساساً عيارياً متعامداً لـ $V_3(R)$ إذا أعطيت $X_1=[1,1,-1]'$ و $X_2=[2,1,0]'$

إرشاد : خـذ $Y_1=X_1$ واحصل على Y_2 بطريقة جرام – شميت ثم على Y_3 بالطريقة الواردة فى (ب) من المسألة ٢

الجـواب :

$$[\sqrt{3}/3,\ \sqrt{3}/3,\ -\sqrt{3}/3]',\ [\tfrac{1}{2}\sqrt{2},\ 0,\ \tfrac{1}{2}\sqrt{2}]',\ [\sqrt{6}/6,\ -\sqrt{6}/3,\ -\sqrt{6}/6]'$$

٣٣ – أوجد أساس عيارى متعامد لـ $V_3(R)$ إذا أعطيت $X_1=[7,-1,-1]'$.

٣٤ – برهن بطريقتين مختلفتين على أن المتجهات $[1,-1,-2,-3]'$، $[1,2,3,4]'$ و $[5,4,5,6]'$ مرتبطة خطياً .

٣٥ – برهن أنه إذا كانت A متماثلة تخالفية وكانت $I+A$ غير شاذة فإن $B=(I-A)(I+A)^{-1}$ متعامدة .

٣٦ – استخدم المسألة ٣٥ لتحصل على مصفوفة متعامدة B إذا كان :

(ا) $A=\begin{bmatrix}0&5\\-5&0\end{bmatrix}$ (ب) $A=\begin{bmatrix}0&1&2\\-1&0&3\\-2&-3&0\end{bmatrix}$

الجـواب : (ا) $\frac{1}{13}\begin{bmatrix}-12&-5\\5&-12\end{bmatrix}$. (ب) $\frac{1}{15}\begin{bmatrix}5&-14&2\\-10&-5&-10\\10&2&-11\end{bmatrix}$

٣٧ – برهن أنه إذا كانت A مصفوفة متعامدة وإذا كان $B=AP$، حيث P مصفوفة غير شاذة فإن BP^{-1} متعامدة .

٣٨ – فى تحويل للأحداثيات من الأساس E إلى أساس عيارى متعامد Z إذا فرضنا P مصفوفة هذا التحويل فإن $Y=AX$ يصبح $Y_1=P^{-1}APX_1$ أو $Y_1=BX_1$ (أنظر فى الفصل ١٢) . برهن أنه إذا كانت A متعامدة فإن B تكون متعامدة أيضاً والعكس بالعكس وهذا مايبرهن النظرية XIV .

٣٩ – برهن أنه إذا كانت A مصفوفة متعامدة وكانت $I+A$ غير شاذة فإن $B=(I-A)(I+A)^{-1}$ متماثلة تخالفية .

٤٠ – ليكن $X=[x_1,x_2,x_3]'$ و $Y=[y_1,y_2,y_3]'$ متجهين من $V_3(R)$ ولنعرف **حاصل الضرب الاتجاهى** $X\times Y$ لـ X و Y بالشكل $Z=X\times Y=[z_1,z_2,z_3]'$ حيث $z_1=\begin{vmatrix}x_2&y_2\\x_3&y_3\end{vmatrix}$, $z_2=\begin{vmatrix}x_3&y_3\\x_1&y_1\end{vmatrix}$, $z_3=\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}$.

بعد مطابقة z_i بالمعاملات المرافقة لعناصر العمود الثالث من $[X_1,Y_1,0]$ حقق :

(ا) حاصل الضرب الإتجاهى لمتجهين مرتبطين خطياً هو متجه صفرى .

(ب) حاصل الضرب الإتجاهى لمتجهين مستقلين خطياً متعامداً مع كل من المتجهين .

(جـ) $X\times Y=-(Y\times X)$

(د) $(kX)\times Y=k(X\times Y)=X\times(kY)$, حيث k مقدار عددى .

٤١ – إذا كان W، X، Y، Z أربعة متجهات من $V_3(R)$ فبرهن :

(ا) $$X\times(Y+Z)=X\times Y+X\times Z$$

(ب) $$X\cdot(Y\times Z)=Y\cdot(Z\times X)=Z\cdot(X\times Y)=|XYZ|$$

(جـ) $$(W\times X)\cdot(Y\times Z)=\begin{vmatrix}W\cdot Y&W\cdot Z\\X\cdot Y&X\cdot Z\end{vmatrix}$$

(د) $$(X\times Y)\cdot(X\times Y)=\begin{vmatrix}X\cdot X&X\cdot Y\\Y\cdot X&Y\cdot Y\end{vmatrix}$$

الفصل الرابع عشر

المتجهات على حقل الأعداد المركبة

الأعداد المركبة :

إذا كان x و y عددين حقيقيين وكان معرفا بالعلاقة[1] $i^2 = -1$ فإن $z = x + iy$ يدعى عدداً مركباً . يسمى العدد الحقيقي x **الجزء الحقيقي** ويسمى العدد الحقيقي y **الجزء التخيل** للعدد $x + iy$.

يكون عددين مركبين **متساويين** فيما إذا كان الجزء الحقيقي والجزء التخيلي لكل منها يساوي على الترتيب الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للآخـــر .

يكون العدد المركب $x + iy = 0$ فيما إذا كان (**وإذا كان فقط**) $x = y = 0$

يعطى **المرافق** للعدد المركب $z = x + iy$ بالشكل $\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy$ إن مجموع (حاصل ضرب) أي عدد مركب مع مرافقه عدد حقيقي .

إن **القيمة المطلقة** $|z|$ للعدد المركب $z = x + iy$ تعطى بـ $|z| = \sqrt{\bar{z} . z} = \sqrt{x^2 + y^2}$

إن مايلي واضح بشكل مباشر لأي عدد مركب $z = x + iy$

$$|z| \geq |x| \quad \text{و} \quad |z| \geq |y| \qquad (14.1)$$

المتجهات :

ليكن X متجها ذا n مركبة على حقل الأعداد المركبة C . إن مثل هذه المتجهات في مجموعها تكون الفراغ الإتجاهي $V_n(C)$.
بما أن $V_n(R)$ حقل جزئي فمن المتوقع أن كل نظرية تخص متجهات الفراغ $V_n(C)$ ستؤول لنظرية من نظريات الفصل ١٢ عند اعتبار المتجهات الحقيقية فقط .

إذا كان $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]'$ و $Y = [y_1, y_2, \ldots, y_n]'$ متجهين من $V_n(C)$ فإن حاصل ضربهما الداخلي يعرف بالعلاقة :

$$X \cdot Y = \bar{X}'Y = \bar{x}_1 y_1 + \bar{x}_2 y_2 + \cdots + \bar{x}_n y_n \qquad (14.2)$$

يمكن تحقيق القوانين التالية التي تحكم حاصل الضرب الداخلي بسهولة تامة :

(14.3)

(أ) $X \cdot Y = \overline{Y \cdot X}$

(ب) $(cX) \cdot Y = \bar{c}(X \cdot Y)$

(جـ) $X \cdot (cY) = c(X \cdot Y)$

(د) $X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$

(هـ) $(Y + Z) \cdot X = Y \cdot X + Z \cdot X$

(و) $X \cdot Y + Y \cdot X = 2R(X \cdot Y)$
حيث $R(X \cdot Y)$ هو الجزء الحقيقي من $X \cdot Y$

(ز) $X \cdot Y - Y \cdot X = 2C(X \cdot Y)$
حيث $C(X \cdot Y)$ هو الجزء التخيلي من $X \cdot Y$

أنظر المسألة ١

---

(١) إن هذا التعريف يوحي بشيء من الالتباس ومثل ذلك كتابة $i = \sqrt{-1}$ ويفضل تعريف العدد المركب $x + iy$ بالنقطة المرافقة $M(x,y)$ وتعريف i بالنقطة $A(0,1)$.

يعرف طول متجه X بالعلاقة $||X|| = \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

يكون المتجهان X و Y متعامدين فيما إذا كان $X.X = Y.X = 0$

لمتجهات الفراغ $V_n(C)$ تتحقق المتباينة المثلثية .

$$||X+Y|| \leq ||X|| + ||Y|| \tag{14.4}$$

وكذلك تتحقق متباينة شوارز (أنظر المسألة ٢)

$$|X \cdot Y| \leq ||X|| \cdot ||Y|| \tag{14.5}$$

علاوة على ذلك (أنظر النظريات I VI من الفصل ١٣) ما يلى :

I. إن أى مجموعة من m متجها ذات الـ n مركبة على C المتعامدة كل منها على الأخرى والغير صفرية هى مجموعة مستقلة خطيا ولذلك فهى تولد فراغا اتجاهيا $V_n^m(C)$.

II. إذا كان المتجه Y متعامدا مع كل من المتجهات $X_1, X_2, \dots, X_m$ ذات الـ n مركبة فإنه يكون متعامدا مع الفراغ المولد بهذه المتجهات .

III. إذا كان $V_n^h(C)$ فراغا جزئيا من $V_n^k(C)$ حيث $h < k$ فإنه يوجد على الأقل متجه واحد X من $V_n^k(C)$ متعامد مع $V_n^h(C)$.

IV. كل فراغ اتجاهى $V_n^m(C)$ حيث $m > 0$ يحوى m وليس الأكثر من m متجا متعامدة مثنى (أى كل منها على الآخر) .

يسمى أساس $V_n^m(C)$ والمكون من متجهات متعامدة مثنى أساس متعامدة . إذا كانت هـذه المتجهات وحدة فإن هذا الأساس يسمى الأساس العيارى المتعامد .

طريقة جرام ـ شميت : إذا كان $X_1, X_2, \dots, X_m$ أساساً للفراغ $V_n^m(C)$ فإننا نعرف :

$$\begin{aligned}
Y_1 &= X_1 \\
Y_2 &= X_2 - \frac{Y_1 \cdot X_2}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1 \\
Y_3 &= X_3 - \frac{Y_2 \cdot X_3}{Y_2 \cdot Y_2} Y_2 - \frac{Y_1 \cdot X_3}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
Y_m &= X_m - \frac{Y_{m-1} \cdot X_m}{Y_{m-1} \cdot Y_{m-1}} Y_{m-1} - \dots - \frac{Y_1 \cdot X_m}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1
\end{aligned} \tag{14.6}$$

إن متجهات الوحدة $G_i = \dfrac{Y_i}{||Y_i||}$ حيث $(i = 1, 2, \dots m)$ تكون أساساً عيارى متعامداً للفراغ $V_n^m(C)$.

V . إذا كانت المتجهات $X_1, X_2, \dots, X_s$ ، حيث $(m > s \geq 1)$ متجهات وحدة من $V_n^m(C)$ ومتعامدة مثنى فإنه توجد متجهات وحدة (يمكن الحصول عليها بواسطة طريقة جرام ـ شميت) . $X_{s+1}, X_{s+2}, \dots, X_m$ فى الفراغ بحيث تكون المجموعة $X_1, X_2, \dots, X_m$ أساسا عياريا ومتعامدا .

مصفوفة جرام (جراميان) : لتكن $X_1, X_2, \dots, X_p$ مجموعة متجهات ذات n مركبة عناصرها مركبة تعرف مصفوفة جرام على أنها .

$$G = \begin{bmatrix} X_1 \cdot X_1 & X_1 \cdot X_2 & \cdots & X_1 \cdot X_p \\ X_2 \cdot X_1 & X_2 \cdot X_2 & \cdots & X_2 \cdot X_p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ X_p \cdot X_1 & X_p \cdot X_2 & \cdots & X_p \cdot X_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{X}_1' X_1 & \bar{X}_1' X_2 & \cdots & \bar{X}_1' X_p \\ \bar{X}_2' X_1 & \bar{X}_2' X_2 & \cdots & \bar{X}_2' X_p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{X}_p' X_1 & \bar{X}_p' X_2 & \cdots & \bar{X}_p' X_p \end{bmatrix} \quad (14.7)$$

إن من الواضح أن المتجهات تكون متعامدة كلا منها على الآخر فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) G قطرية.

إذا اتبعنا حل المسألة ١٤ من الفصل ١٧ فإنه يمكننا أن نبرهن .

VI. لمجموعة مكونة من المتجهات $X_1, X_2, \ldots, X_p$ ذات الـ n مركبة عناصرها مركبة يكوان $|G| \geq 0$ تتحقق المساواة فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) هذه المتجهات مرتبطة خطيا .

المصفوفة الواحدية : تسمى مصفوفة مربعة A من الدرجة n ، **واحدية** فيما إذا كان $(\bar{A})'A = A(\bar{A})' = I$, أي إذا كان $(\bar{A})' = A^{-1}$.

إن متجهات أعمدة (صفوف) مصفوفة واحدية ، تكون متجهات وحدة متعامدة مثنى .

تمشيا مع النظريات المتعلقة بالمصفوفات المتعامدة التي أوردناها في الفصل ١٣ يمكننا أن نذكر هنا :

VII. إن متجهات أعمدة (صفوف) مصفوفة مربعة وواحدية من n تؤلف أساساً عياريا متعامداً لـ $V_n(C)$ والعكس صحيح .

VIII. إن مكوس ومنقول مصفوفة واحدية هما مصفوفتان واحديتان .

IX. إن حاصل ضرب مصفوفتين واحديتين أو أكثر هي مصفوفة واحدية .

X. إن محددة مصفوفة واحدية تساوي الواحد .

التحويلات الواحدية : يسمى التحويل الخطي .

$$Y = AX \quad (14.8)$$

عندما تكون المصفوفة A واحدية ، **تحويلا واحديا** .

XI. يحافظ التحويل الخطي على الأطوال (ونتيجة لذلك على حاصل الضرب الداخلي فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) مصفوفته مصفوفة واحدية .

XII. إذا كان $Y = AX$ تحويلا للاحداثيات من اساس E لأساس آخر Z فإن الأساس Z يكون عياريا متعامدا فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) A واحدية .

مسـائل محلولة

١ - إذا كان $X = [1+i, -i, 1]'$ و $Y = [2+3i, 1-2i, i]'$,

(ا) أوجد $Y \cdot X$ و $X \cdot Y$ (ج) حقق $X \cdot Y + Y \cdot X = 2R(X \cdot Y)$

(ب) حقق $X \cdot Y = Y \cdot X$ (د) حقق $X \cdot Y - Y \cdot X = 2C(X \cdot Y)$

(ا) (a) $$X \cdot Y = \bar{X}'Y = [1-i, i, 1]\begin{bmatrix} 2+3i \\ 1-2i \\ i \end{bmatrix} = (1-i)(2+3i) + i(1-2i) + 1(i) = 7+3i$$

$$Y \cdot X = \bar{Y}'X = [2-3i, 1+2i, -i]\begin{bmatrix} 1+i \\ -i \\ 1 \end{bmatrix} = 7-3i$$

(ب) من (١) : أن $X . Y$ المرافق لـ $Y . X$ هو $7+3i = X\cdot Y$.

(جـ) $X\cdot Y + Y\cdot X = (7+3i) + (7-3i) = 14 = 2(7) = 2R(X\cdot Y)$

(د) $X\cdot Y - Y\cdot X = (7+3i) - (7-3i) = 6i = 2(3i) = 2C(X\cdot Y)$

٢ – برهن متباينة شوارز . $|X\cdot Y| \le \|X\|\cdot\|Y\|$.

كما فى حالة المتجهات الحقيقية ، تكون المتباينة صحيحة إذا كان $X = 0$ أو $Y = 0$.

عندما يكون X و Y متجهين غير صفريين ويكون a عددا حقيقيا يكون

$$\|aX+Y\|^2 = (aX+Y)\cdot(aX+Y) = a^2X\cdot X + a(X\cdot Y+Y\cdot X) + Y\cdot Y = a^2\|X\|^2 + 2aR(X\cdot Y) + \|Y\|^2 \ge 0.$$

بما أن الدالة التربيعية فى a تكون غير سالبة إذا كان (وإذا كان فقط) مميزها غير موجب أى :

$$R(X\cdot Y)^2 - \|X\|^2\|Y\|^2 \le 0 \quad \text{و} \quad R(X\cdot Y) \le \|X\|\cdot\|Y\|$$

إذا كان $X . Y = 0$ فإن $|X\cdot Y| = R(X\cdot Y) \le \|X\|\cdot\|Y\|$. أما إذا كان $X.Y \ne 0$ فإننا نعرف $c = \dfrac{X\cdot Y}{|X\cdot Y|}$.

ونجد عندها $R(cX\cdot Y) \le \|cX\|\cdot\|Y\| = |c|\,\|X\|\cdot\|Y\| = \|X\|\cdot\|Y\|$ بينما من (ب) (14.3) نجد $R(cX\cdot Y) = R[\bar{c}(X\cdot Y)] = |X\cdot Y|$. أى $|X\cdot Y| \le \|X\|\cdot\|Y\|$ لكل X و Y .

٣ – برهن أن $B=(\bar{A})'A$ مصفوفة هيرميتية لأى مصفوفة مربعة A .

$(\bar{B})' = \{(\bar{A})'\bar{A}\}' = (A'\bar{\bar{A}}) = (\bar{A})'A = B$ وهذا يعنى أن B هيرميتية .

٤ – إذا كانت $A = B+iC$ مصفوفة هيرميتية ، فبرهن أن $(\bar{A})'A$ تكون حقيقية إذا كانت (وإذا كانت فقط) B و C متبادلتين عكسيا .

بما أن $B+iC$ مصفوفة هيرميتية فإن $(\overline{B+iC})' = B+iC$; وهكذا يكون :

$$(\bar{A})'A = (\overline{B+iC})'(B+iC) = (B+iC)(B+iC) = B^2 + i(BC+CB) - C^2$$

ويكون ذلك حقيقيا إذا كان (وإذا كانت فقط) $BC+CB=0$ أو $BC=-CB$ أى إذا كانت (وإذا كانت فقط المصفوفتان B و C متبادلتين عكسيا .

٥ – برهن أنه إذا كانت A مصفوفة هيرميتية تخالفية فإن $\pm\, i\,A$ تكون هيرميتية .

اعتبر $B = -iA$ بما أن A هيرميتية تخالفية ، فان $(\bar{A})' = -A$. أى

$$(\bar{B})' = (\overline{-iA})' = i(\bar{A})' = i(-A) = -iA = B$$

وهذا ما يبرهن على أن B هيرميتية . يمكن للقارىء النظر فى الحالة $B=iA$.

مسائل اضافية

٦ – إذا أعطيت المتجهات $X_1 = [i, 2i, 1]'$, $X_2 = [1, 1+i, 0]'$ و $X_3 = [i, 1-i, 2]'$,

(١) أوجد $X_1.X_2$ و X_3 . X_2.

(ب) أوجد طول كل متجه X_i

(جـ) أثبت أن المتجه $[1-i, -1, 1-i]'$ متعامد مع كل من X_1 و X_2

(د) أوجد متجها متعامدا مع كل من X_1 و X_3

الجواب : (ا) $2-3i$ و $-i$ (ب) $\sqrt{6}$ و $\sqrt{3}$ و $\sqrt{7}$

(د) $[-1-5i, i, 3-i]$

٧ – برهن أن المتجهات $[i, 1-i, 0]'$، $[1+i, i, 1]'$ و $[1-i, 1, 3i]'$ مستقلة خطيا ومتعامدة كل منها على الأخرى .

٨ – برهن صحة العلاقة (14.3)

٩ – برهن صحة المتباينة المثلثية .

١٠ – برهن صحة النظريات I - IV .

١١ – استنتج العلاقة (14.6)

١٢ – باستخدام العلاقات (14.6) ومن المتجهات المعطاة أدناه مرتبة كون أساس عيارى متعامد للفراغ $V_3(C)$ عندما تكون المتجهات هى

(ا) $[0, 1, -1]'$، $[1+i, 1, 1]'$، $[1-i, 1, 1]'$

(ب) $[1+i, i, 1]'$، $[2, 1-2i, 2+i]'$، $[1-i, 0, -i]'$.

الجواب : (ا) $[0, \frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}]'$، $[\frac{1}{2}(1+i), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]'$، $[-\frac{1}{\sqrt{2}}i, \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+i), \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+i)]'$

(ب) $[\frac{1}{2}(1+i), \frac{1}{2}i, \frac{1}{2}]'$، $[\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1-5i}{4\sqrt{3}}, \frac{3+3i}{4\sqrt{3}}]'$، $[\frac{7-i}{2\sqrt{30}}, \frac{-5}{2\sqrt{30}}, \frac{-6+3i}{2\sqrt{30}}]'$

١٣ – برهن أنه إذا كانت A مصفوفة معرفة على حقل الأعداد المركبة فإن $A+\bar{A}$ تكون ذات عناصر حقيقية فقط وأن $A-\bar{A}$ تكون ذات عناصر تخيلية بحتة فقط .

١٤ – برهن صحة النظرية V .

١٥ – إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n فبرهن :

(ا) تكون المصفوفة $\bar{A}'A$ قطرية فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) أعمدة A متجهات متعامدة مثنى .

(ب) يكون $\bar{A}'A = I$ فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) أعمدة A متجهات وحدة متعامدة مثنى .

١٦ – برهن أنه إذا كان X و Y متجهين ذوى n مركبة وكانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n فان $X \cdot AY = \bar{A}'X \cdot Y$.

١٧ – برهن صحة النظريات VII – X

١٨ – برهن أنه إذا كانت A مصفوفة هيرميتية تخالفية بحيث تكون $I+A$ غير شاذة فإن $B = (I-A)(I+A)^{-1}$ تكون مصفوفة واحـدية .

١٩ – استخدم المسألة ١٨ لتكوين مصفوفة واحدية فيما إذا أعطيت (ا) $\begin{bmatrix} 0 & 1+i \\ -1+i & i \end{bmatrix}$. (ب) $\begin{bmatrix} 0 & i & 1+i \\ i & 0 & i \\ -1+i & i & 0 \end{bmatrix}$

الجواب : (ا) $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1+2i & -4-2i \\ 2-4i & -2-i \end{bmatrix}$. (ب) $\frac{1}{29}\begin{bmatrix} -9+8i & -10-4i & -16-18i \\ -2-24i & 1+12i & -10-4i \\ 4-10i & -2-24i & -9+8i \end{bmatrix}$

٢٠ – برهن أنه إذا كان كل من A و B مصفوفة واحدية وكانتا من نفس الدرجة فإن كلا من AB و BA تكون واحدية .

٢١ – تابع برهان المسألة ١٠ من الفصل ١٣ لتبرهن النظرية XI

٢٢ – برهن أنه إذا كانت A مصفوفة واحدية وهرمتية فإن A مصفوفة ملتفة .

٢٣ – برهن أن $\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1+i) & i/\sqrt{3} & \frac{3+i}{2\sqrt{15}} \\ -\frac{1}{2} & 1/\sqrt{3} & \frac{4+3i}{2\sqrt{15}} \\ \frac{1}{2} & -i/\sqrt{3} & \frac{5i}{2\sqrt{15}} \end{bmatrix}$ هي مصفوفة واحدية .

٢٤ – برهن أنه إذا كانت A مصفوفة واحدية وكان $B = A\,P$ حيث P غير شاذة ، فإن $P\,B^{-1}$ تكون واحدية .

٢٥ – برهن أنه إذا كانت A مصفوفة واحدية وكانت $I+A$ غير شاذة ، فإن $B = (I-A)(I+A)^{-1}$ تكون مصفوفة هرمتية تخالفية .

الفصل الخامس عشر

التطابق

المصفوفات المتطابقة :

نقول عن مصفوفتين A و B من الدرجة n على F إنهما متطابقتان و$\underset{\sim}{C}$ وعلى F فيما إذا وجدت مصفوفة غير شاذة P على F تحقق العلاقة :

$$B = P' AP \tag{15.1}$$

إن من الواضح أن التطابق هو حالة خاصة من التكافؤ لذلك فالمصفوفات المتطابقة لها نفس الرتبة .

عندما يعبر عن P بحاصل ضرب أعمدة مصفوفات أولية ، فإن P' يكون حاصل الضرب بترتيب معاكس لنفس مصفوفات الصفوف الأولية ، أي أن A و B تكونان مصفوفتين مطابقتين إذا كان من الممكن أن تختزل A إلى B بمتوالية من أزواج التحويلات الأولية بحيث يتكون كل زوج منها من تحويل صفوف أولى يتبعه نفس تحويل الأعمدة الأولى .

المصفوفات المتماثلة : سنبرهن فى المسألة ١

I . كل مصفوفة متماثلة A رتبتها r على F تطابق على F مصفوفة قطرية تكون عناصرها القطرية الأولى والتى عددها r غير صفرية بينما تكون بقية العناصر أصفارا .

مثال ١ :

أوجـد مصفوفة غير شاذة P عناصرها أعداد جذرية ، بحيث تكون $D = P' A P$ مصفوفة قطرية ، علما بأن :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \\ 3 & 5 & 8 & 10 \\ 2 & 8 & 10 & -8 \end{bmatrix}$$

لاختزال A إلى D نستعمل $[A\ I]$ ونحسب ، خلال ذلك ، P' . نستعمل أولا $H_{21}(-2)$ و $K_{21}(-2)$ ثم $H_{31}(-3)$ و $K_{31}(-3)$ واخيرا $H_{41}(-2)$ و $K_{41}(-2)$ لكى نحصل على أصفار فى الصف الأول والعمود الأول . سنوفر كثيرا من الوقت فيما لو طبقنا أولا التحويلات الثلاثة للصفوف ثم اتبعناها بالتحويلات الثلاثة للاعمدة . وإذا لم تتحول A إلى مصفوفة متماثلة فإن ذلك يكون نتيجة خطأ ما قد حدث . والآن :

$$[A\ H] = \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 8 & 10 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 10 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -12 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -10 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -10 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$= [D\ P']$$

ويكون إذن :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -10 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

إن المصفوفة D التي اختزلت إليها المصفوفة A ليست وحيدة . فالتحويلين الإضافيين $H_3(½)$ و $K_3(½)$ مثلا ، يحول D إلى المصفوفة القطرية $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ بينما تستبدل التحويلات $H_2(3)$ و $K_2(3)$ المصفوفة D بالمصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. ومن ناحية ثانية ، لا يوجد زوج من التحويلات العادية (القياسية) أو الحقيقية قادرة أن تستبدل D بمصفوفة قطرية عناصر قطرها أعداد غير سالبة فقط .

المصفوفات الحقيقية المتماثلة :

بفرض أن المصفوفة الحقيقية المتماثلة A قد اختزلت بواسطة تحويلات حقيقية أولية إلى مصفوفة متطابقة قطرية D . أى لنفرض أن $P'AP = D$ بينما تعتمد العناصر القطرية غير الصفرية فى D على كل من A و P فإنه سيتضح فى الفصل ١٧ أن عدد العناصر القطرية الموجبة وغير الصفرية تعتمد فقط على A .

بواسطة متتالية من تحويلات الصفوف ومثيلاتها من تحويلات الأعمدة من النوع ١ فإنه يمكن إعادة ترتيب العناصر القطرية فى D بحيث تقع العناصر الموجبة قبل العناصر السالبة . وبعد ذلك فإنه من الممكن استعمال متتالية من تحويلات الصفوف الحقيقية وتحويلات الأعمدة المماثلة ومن النوع ٢ لاختزال المصفوفة القطرية لمصفوفة قطرية تكون فيها العناصر غير الصفرية مساوية إما $+1$ أو -1 ويكون عندئذ :

II . إن كل مصفوفة حقيقية متماثلة رتبتها r تكون متطابقة ، على حقل الأعداد الحقيقية ، مع مصفوفة قانونية من الشكل :

$$C = \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (15.2)$$

إن العدد الصحيح P الوارد فى (15.2) يدعى دليل المصفوفة كايدعى العدد $s = p - (r - p)$ شارة المصفوفة .

مثال ٢ :

إذا طبقنا التحويلات H_{23}, K_{23} و $H_2(\frac{1}{2}), K_2(\frac{1}{2})$ على نتيجة المثال ١ فإننا نجـد :

$$[A \mid I] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -10 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] = [C \mid Q']$$

ونجد أيضا $Q'AQ=C$. وهكذا فإن A من الرتبة $r = 3$ والدليل $p = 2$ وشارته $s = 1$

III . تكون مصفوفتان مربعتان متماثلتان من درجة n متطابقتين على حقل الاعداد الحقيقية فيما إذا كان (وإذا كان فقط) لهما نفس الرتبة ونفس الدليل أو إذا كان لهما رتبة واحدة وشارة واحدة .

فى حقل الأعداد الحقيقية ، كل المصفوفات المربعة من الدرجة n من النوع (15.2) هى مجموعة قانونية متطابقة لمجموعة المصفوفات الحقيقية المربعة المتماثلة ذات الدرجة n .

فى حقل الأعداد المركبة ، يكون :

IV . كل مصفوفة مربعة مركبة متماثلة ذات الرتبة r تكون متطابقة على حقل الأعداد المركبة مع مصفوفة قانونية من الشكل :

$$C = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (15.3)$$

مثال ٣ :

إذا طبقنا التحويلين $H_3(i)$ و $K_3(i)$ على ناتج المثال ٢ فإننا نجـد :

$$[A \mid I] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2i & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] = [D \mid R']$$

ونجـد أيضا : $R'AR = D = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

أنظر المسألتين ٢ - ٣

V . تكون مصفوفتان مركبتان متماثلتان من الدرجة n متطابقتين على حقل الأعداد المركبة إذا كانتا (وإذا كانتا فقط) من رتبة واحدة .

المصفوفات المتماثلة التخالفية

إذا كانت A مصفوفة متماثلة تخالفية فإن :

$$(P'AP)' = P'A'P = P'(-A)P = -P'AP$$

وعلى ذلك :

VI . كل مصفوفة $B = P' A P$ متطابقة مع مصفوفة متماثلة تخالفية A ، هى أيضا مصفوفة متماثلة تخالفية .

سنبرهن فى المسألة ٤ :

VII . كل مصفوفة A مربعة من درجة n متماثلة تخالفية على F تكون متطابقة على F مع مصفوفة قانونية .

$$B = \text{diag}\,(D_1, D_2, \ldots, D_t, 0, \ldots, 0) \qquad (15.4)$$

حيث . $D_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, (i = 1, 2, \ldots, t).$ إن رتبة A هى $r = 2t$:

أنظر المسألة ٥

ومنه :

VIII . أى مصفوفتان ، مربعتان من الدرجة n متماثلتان تخالفيتان على F ، تكونان متطابقتان على F إذا كانتا (وإذا كانتا فقط) من رتبة واحدة .

إن مجموعة كل المصفوفات ذات الشكل (15.4) هى مجموعة قانونية بالنسبة للتطابق مع المصفوفات المربعة من الدرجة n المتماثلة التخالفية .

المصفوفات الهرميتية :

نقول عن مصفوفتين A و B مربعتين هرميتيتين من الدرجة n إنهما **متطابقتان هرميتيا** [$\underset{\sim}{HC}$] أو إنهما مقترنتان (موحدتان) فيما إذا وجدت مصفوفة غير شاذة P بحيث يكون :

$$B = \bar{P}'AP \qquad (15.5)$$

أى :

IX . تكون مصفوفتان مربعتان هرمتيتان من الدرجة n ، مقترنتان فيما إذا كان (وإذا كان فقط) من الممكن الحصول على إحداهما من الأخرى بواسطة متتالية من أزواج التحويلات الأولية ، يتكون كل واحد من هذه الأزواج من تحويل أعمدة وتحويل الصفوف المرافق المناظر .

X . إن مصفوفة هرميتية A رتبتها r تكون مقترنة مع مصفوفة قانونية

$$C = \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (15.6)$$

إن العدد الصحيح p الوارد فى (15.6) يدعى دليل A وإن العدد $s = p-(r-p)$ يدعى شارة هذه المصفوفة .

XI . تكون مصفوفتان مربعتان هرمتيتان من الدرجة n مقترنتان فيما إذا كانتا (وإذا كانتا فقط) من رتبة واحدة ودليل واحد أو من رتبة واحدة وشارة واحدة .

إن اختزال مصفوفة هرمتية إلى الشكل القانونى (15.6) يتبع الطريقة الواردة فى المسألة ١ مع الانتباه إلى أزواج التحويلات الأولية المناسبة . تعالج المسألة ٧ الحالة الأكثر إزعاجا فى هذا الموضوع .

أنظر المسألتين ٦ – ٧

المصفوفات الهرميتية المتخالفة :

إذاكانت A مصفوفة هرمتية تخالفية فإنه يكون :

$$(\overline{\overline{P}'AP})' = (\overline{P'A'\overline{P}}) = -\overline{P}'AP$$

ونجد :

XII . أن كل مصفوفة $B = \overline{P}'AP$ مقترنة مع مصفوفة هرمتية تخالفية A هى أيضا مصفوفة هرمتية تخالفية .

استنادا إلى المسألة ٥ من الفصل ١٤ نجد أن $H = -iA$ هى مصفوفة هرمتية إذا كانت A هرمتية تخالفية . واستنادا إلى النظرية X توجد مصفوفة غير شاذة P بحيث يكون :

$$\overline{P}'HP = C = \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وهكذا يكون $i\overline{P}'HP = i\overline{P}'(-iA)P = \overline{P}'AP = iC$ و

$$B = \overline{P}'AP = \begin{bmatrix} iI_p & 0 & 0 \\ 0 & -iI_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (15.7)$$

وعلى ذلك :

XIII . إن كل مصفوفة A مربعة هرميتية ، تخالفية من درجة n ، تكون مقترنة مع مصفوفة من الشكل (15.7) حيث r هى رتبة A و p دليل المصفوفة $-iA$.

XIV . مصفوفتان A و B مربعتان هرمتيتان تخالفيتان من الدرجة n تكونان مقترنتان فيما إذا كانتا (وإذاكانتا فقط) من رتبة واحدة وكانت $-iA$ و $-iB$ لهما نفس الدليل .

أنظر المسألة ٨

مسائل محلولة

١ – برهن أنه يمكن اختزال كل مصفوفة متماثلة على F رتبتها r إلى مصفوفة قطرية تحوى بالضبط r عنصرا غير صفرى على قطرها .

لنفرض أن المصفوفة المتماثلة $A = [a_{ij}]$ غير قطريه . إذا كان $a_{11} \neq 0$ فإن متتالية من أزواج التحويلات الأولية من النوع ٣ يتكون كل واحد منها من تحويل صفوف ونفس تحويل الأعمدة ، تختزل A إلى :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

نتابع التحويل طالما أن ....b_{22}, c_{33} تختلف عن الصفر . لنفرض أنه ، خلال الاختزال حصلنا على المصفوفة

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & & & & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & & & & 0 \\ \cdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & h_{ss} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & k_{s+1,s+2} \cdots & k_{s+1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & k_{s+2,s+1} & k_{s+2,s+2} \cdots & k_{s+2,n} \\ \cdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & k_{n,s+1} & k_{n,s+2} \cdots & k_{nn} \end{bmatrix}$$

حيث العنصر القطرى هو $k_{s+1,s+1}=0$. إذا كان كل $k_{ij}=0$ تكون قد برهنا النظرية لقيم $s=r$ أما إذا كانت بعض العناصر k_{ij} ، مثل $k_{s+v,s+v}\neq 0$ فإننا ننقله إلى الموضع $(s+1, s+1)$ بالتحويلين الصفى والعمودى الملائمين ومن النوع ١ عندما تكون $u=v$. وإذا لم يكن ذلك فإننا نضيف إلى الصف ذى الرقم $(s+v)$ الصف ذا الرقم $(s+u)$ وبعد تطبيق تحويل الأعمدة المناظر . فإننا نحصل على عنصر قطرى غير صفرى . (عندما يكون $a_{11}=0$ فإننا نعمل كما فى الحالة $k_{s+1,s+1}=0$ السالفة الذكر) .

بما أننا توصلنا إلى متتالية من المصفوفات المتكافئة ، فإن المصفوفة A ستختزل ، فى نهاية المطاف ، إلى مصفوفة قطرية ، لا يساوى أى عنصر من العناصر الـ r الأول من قطرها ، الصفر بينما يساوى كل عنصر آخر منها الصفر .

٢ – اختزل المصفوفة المتماثلة $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&3&5\\2&5&5\end{bmatrix}$ إلى الصيغة القانونية (15.2) وإلى الشكل القانونى (15.3)

وفى كل من الحالتين أوجد المصفوفة P التى تقوم بهذا الاختزال .

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\2&3&5&0&1&0\\2&5&5&0&0&1\end{array}\right] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&-1&1&-2&1&0\\0&1&1&-2&0&1\end{array}\right] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&-1&0&-2&1&0\\0&0&2&-4&1&1\end{array}\right] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&2&0&-4&1&1\\0&0&-1&-2&1&0\end{array}\right]$$

$$= [D \mid P_1']$$

لحصول على (15.2) ، نكتب :

$$[D \mid P_1'] = \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&2&0&-4&1&1\\0&0&-1&-2&1&0\end{array}\right] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-2\sqrt{2}&\frac{1}{2}\sqrt{2}&\frac{1}{2}\sqrt{2}\\0&0&-1&-2&1&0\end{array}\right] = [C \mid P']$$

ونجد :

$$P = \begin{bmatrix}1&-2\sqrt{2}&-2\\0&\frac{1}{2}\sqrt{2}&1\\0&\frac{1}{2}\sqrt{2}&0\end{bmatrix}$$

لإيجاد (15.3) ، نكتب

$$[D \mid P_1'] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2i & -i & 0 \end{array}\right] = [C \mid P']$$

وكذلك :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2\sqrt{2} & 2i \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -i \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

٣ – أوجد مصفوفة غير شاذة P بحيث تكون $P'AP$ شكلا قانونيا من النوع (15.3)

علما أن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ i & 0 & 2-i \\ 1+i & 2-i & 10+2i \end{bmatrix}$$

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & i & 1+i & 1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 2-i & 0 & 1 & 0 \\ 1+i & 2-i & 10+2i & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3-2i & -i & 1 & 0 \\ 0 & 3-2i & 10 & -1-i & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5+12i & 1+2i & -3+2i & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7+4i}{13} & \frac{-5+12i}{13} & \frac{3-2i}{13} \end{array}\right]$$

$$= [C \mid P']$$

حيث :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -i & \frac{7+4i}{13} \\ 0 & 1 & \frac{-5+12i}{13} \\ 0 & 0 & \frac{3-2i}{13} \end{bmatrix}$$

٤ – برهن أن كل مصفوفة A مربعة متماثلة تخالفية من الدرجة n على F ومن الرتبة $2t$ تكون متطابقة على F مع مصفوفة من الشكل :

$$B = \operatorname{diag}(D_1, D_2, \ldots, D_t, 0, \ldots, 0)$$

حيث

$$D_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (i = 1, 2, \ldots, t).$$

إذا كانت $A = 0$ فإن $A = B$ إذا كانت $A \neq 0$ فإنه يوجد ، بعض $a_{ij} = -a_{ji} \neq 0$. لنبادل بين الصف ذى الرقم i والصف الأول ولنبادل أيضا بين الصف ذى الرقم j والصف الثانى ثم لنبادل بين العمود ذى الرقم i والعمود الأول والعمود ذى الرقم j والعمود الثانى فتتحول A إلى المصفوفة المماثلة التخالفية

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{ij} & E_2 \\ -a_{ij} & 0 & \\ E_3 & & E_4 \end{bmatrix}$$

. لنضرب أخيرا ، الصف الأول والعمود الأول بـ $1/a_{ij}$ فنحصل على المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & F_2 \\ -1 & 0 & \\ F_3 & & E_4 \end{bmatrix}$$

، ومنها بتطبيق تحويلات صفوف وأعمدة أولية من النوع ٣ ، نحصل على :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \\ 0 & & F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & F_4 \end{bmatrix}$$

إذا كانت $F_4 = 0$ فإن الاختزال يكون تاما وإلا فإن العملية تكرر على ......F_4 حتى نحصل على المصفوفة B .

• – أوجد مصفوفة غير شاذة P بحيث يكون $P'AP$ من الشكل القانونى (15.4) علما أن :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \\ -4 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

مستخدما $a_{13} \neq 0$ فإننا نحتاج فقط ، أن نبادل بين الصفين الثالث والثانى ونتبع ذلك بأن نبادل بين العمودين الثالث والثانى لـ

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

لكى نحصل على

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

نضرب ، بعد ذلك ، الصف الأول والعمود الأول فى ½ ونتبع ذلك بأن نخلص الصفين الأولين والعمودين الأولين من العناصر الغير صفرية ، فنجد على التعاقب :

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

و

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

وأخيرا نضرب الصف الثالث والعمود الثالث فى $-1/5$ لنحصل على

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/10 & -1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} P'$$

وهكذا عندما يكون $P'AP = \mathrm{diag}(D_1, D_2)$.

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/10 & -1 \\ 0 & 0 & -1/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

٦ – أوجد مصفوفة غير شاذة P بحيث تكون المصفوفة $\bar{P}'AP$ في الشكل القانوني (15.6) علما بأن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & -3+2i \\ 1+i & 2 & -i \\ -3-2i & i & 0 \end{bmatrix}$$

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1-i & -3+2i & 1 & 0 & 0 \\ 1+i & 2 & -i & 0 & 1 & 0 \\ -3-2i & i & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1-i & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -13 & 3+2i & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{25}{13} & 0 & \frac{2-3i}{13} & 1 & \frac{5}{13} \\ 0 & 0 & -13 & 3+2i & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2-3i}{5\sqrt{13}} & \frac{13}{5\sqrt{13}} & \frac{1}{\sqrt{13}} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{3+2i}{\sqrt{13}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{13}} \end{array}\right]$$

$$= [C \mid \bar{P}']$$

ونجد :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2+3i}{5\sqrt{13}} & \frac{3-2i}{\sqrt{13}} \\ 0 & \frac{13}{5\sqrt{13}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{13}} & \frac{1}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}$$

٧ – أوجد مصفوفة غير شاذة P بحيث يكون $\bar{P}'AP$ من الشكل القانوني (15.6) علما أن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+2i & 2-3i \\ 1-2i & 5 & -4-2i \\ 2+3i & -4+2i & 13 \end{bmatrix}$$

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1+2i & 2-3i & 1 & 0 & 0 \\ 1-2i & 5 & -4-2i & 0 & 1 & 0 \\ 2+3i & -4+2i & 13 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{HC} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5i & -1+2i & 1 & 0 \\ 0 & -5i & 0 & -2-3i & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{HC} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 5i & 2 & 1 & i \\ 0 & -5i & 0 & -2-3i & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{HC} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 2 & 1 & i \\ 0 & 0 & -5/2 & -2-2i & \frac{1}{2}i & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{HC} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{i}{\sqrt{10}} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{-4-4i}{\sqrt{10}} & \frac{i}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{array}\right]$$

$$= [C \mid \bar{P}']$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{-4+4i}{\sqrt{10}} \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{10}} & \frac{-i}{\sqrt{10}} \\ 0 & \frac{-i}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

٨ – أوجد مصفوفة غير شاذة P بحيث يكون $\bar{P}'AP$ من الشكل القانونى (15.7) علما أن

$$A = \begin{bmatrix} i & -1 & -1+i \\ 1 & 0 & 1+2i \\ 1+i & -1+2i & 2i \end{bmatrix}$$

اعتبر المصفوفة الهرمتية
$$\underset{\sim}{H} = -iA = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 0 & 2-i \\ 1-i & 2+i & 2 \end{bmatrix}$$

إن المصفوفة غير الشاذة
$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1-2i & -i \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
تحقق العلاقة $\bar{P}'HP = \text{diag}[1, 1, -1]$.

ونجد أخيرا $\bar{P}'AP = \text{diag}[i, i, -i]$.

مسائل اضافية

٩ – أوجد مصفوفة غير شاذة P بحيث تكون $P'AP$ فى الصيغة القانونية (15.2) علما أن :

(أ) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ (ب) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ (جـ) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ (د) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

الجواب (أ) $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ب) $P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (جـ) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ (د) $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

١٠ – أوجد مصفوفة غير شاذة P بحيث تكون $P'AP$ فى الصيغة القانونية (15.3) علما أن :

(أ) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1+2i \\ 1+2i & 1+4i \end{bmatrix}$ (ب) $A = \begin{bmatrix} 2i & 1+i & 2-4i \\ 1+i & 1+i & -1-2i \\ 2-4i & -1-2i & -3-5i \end{bmatrix}$

الجواب (ا) $P = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(-1-2i) \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (ب) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-i) & i/\sqrt{2} & (1+i)/2 \\ 0 & (1-i)/\sqrt{2} & (-3-2i)/13 \\ 0 & 0 & (3+2i)/13 \end{bmatrix}$

١١ – أوجد مصفوفة غير شاذة P بحيث تكون $P'AP$ فى الصيغة القانونية (15.4) علما بأن :

(ا) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ (ب) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ (جـ) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ (د) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

الجواب : (ا) $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ب) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (جـ) $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (د) $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/3 & 1 \\ 0 & 1 & -2/3 & 2 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

١٢ – أوجد مصفوفة غير شاذة P بحيث تكون $P'AP$ فى الصيغة القانونية (15.6) علما أن :

(ا) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1-3i \\ 1+3i & 10 \end{bmatrix}$ (ب) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 2 \\ 1-i & 3 & -i \\ 2 & i & 4 \end{bmatrix}$ (جـ) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 3-2i \\ 1-i & 3 & 3-4i \\ 3+2i & 3+4i & 18 \end{bmatrix}$

الجواب (ا) $P = \begin{bmatrix} 1 & -1+3i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. (ب) $P = \begin{bmatrix} 1 & -1-i & (-5-i)/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & (2-i)/\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$ (جـ) $P = \begin{bmatrix} 1 & -1-i & (-2+5i) \\ 0 & 1 & (-2-i) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

١٣ – أوجد مصفوفة غير شاذة P بحيث تكون $P'AP$ فى الصيغة القانونية (15.7) علما أن ،

(ا) $A = \begin{bmatrix} i & 1+i \\ -1+i & i \end{bmatrix}$ (جـ) $A = \begin{bmatrix} i & -1-i & -1 \\ 1-i & 0 & 1-i \\ 1 & -1-i & -i \end{bmatrix}$

(ب) $A = \begin{bmatrix} i & -1 & 1+i \\ 1 & 2i & i \\ -1+i & i & 6i \end{bmatrix}$ (د) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2+i \\ -1 & 0 & 1-2i \\ -2+i & -1-2i & 0 \end{bmatrix}$

الجواب (ا) $P = \begin{bmatrix} 1 & -1+i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (جـ) $P = \begin{bmatrix} 1 & (1-i)/\sqrt{2} & -1 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(ب) $P = \begin{bmatrix} 1 & -i & -2+3i \\ 0 & 1 & -2-i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (د) $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & (1-2i)/\sqrt{10} & -1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & (-2-i)/\sqrt{10} & i/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{10} & 0 \end{bmatrix}$

١٤ – إذا كان $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ فبرهن أن هناك مصفوفة C مربعة من الدرجة الثانية تحقق $C'DC = D$ فيما إذا كان (وإذا كان فقط) $|C| = 1$

١٥ – لنفرض أن A مصفوفة غير شاذة مربعة من الدرجة n حقيقية ومتماثلة دليلها p. برهن أن $|A| > 0$ فيما إذا كان (وإذا كان فقط) $n - p$ زوجيا .

١٦ – برهن أن مصفوفة غير شاذة ومتماثلة A تكون متطابقة مع معكوسها .

إرشاد : خذ $P = BB'$ حيث $B'AB = I$ ثم بين أن $P'AP = A^{-1}$.

١٧ – أعد كتابة المناقشة المتعلقة بالمصفوفات المتماثلة الواردة فى برهان النظرية I لكى تحصل على العلاقة (15.6) الخاصة بالمصفوفات الهرمتية .

١٨ – برهن أنه إذا كان $A \overset{C}{\sim} B$ فإن A تكون متماثلة (متماثلة تخالفية) فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) المصفوفة B متماثلة (متماثلة تخالفية) .

١٩ – لتكن S مصفوفة غير شاذة ومتماثلة و T مصفوفة متماثلة تخالفية بحيث يكون $(S+T)(S-T)$ مصفوفة غير شاذة . بين أن $P'SP = S$ عندما يكون

$$P = (S+T)^{-1}(S-T)$$

إرشاد :
$$P'SP = [(S-T)^{-1}(S+T)S^{-1}(S-T)(S+T)^{-1}]^{-1}.$$

٢٠ – لتكن S مصفوفة غير شاذة متماثلة و T أى مصفوفة بحيث تكون المصفوفة $(S+T)(S-T)$ غير شاذة . بين أنه إذا كان $P'SP = S$ عندما يكون $P = (S+T)^{-1}(S-T)$ وكذلك $I+P$ غير شاذة فإن T تكون متماثلة تخالفية .

إرشاد :
$$T = S(I-P)(I+P)^{-1} = S(I+P)^{-1}(I-P).$$

٢١ – برهن أن تطابق المصفوفات المربعة من الدرجة n هى علاقة تكافؤ .

الفصل السادس عشر

الصيغ ثنائية الخطية

إن تعبيرا خطيا ومتجانسا فى كل من مجموعتى المتغيرات $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ و $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ يسمى صيغة ثنائى الخطية بالنسبة لهذه المتغيرات . مثال ذلك : أن

$$x_1y_1 + 2x_1y_2 - 13x_1y_3 - 4x_2y_1 + 15x_2y_2 - x_2y_3$$

صيغة ثنائى الخطية بالنسبة للمتغيرات (x_1, x_2) و (y_1, y_2, y_3) .

إن صيغة ثنائى الخطية الأكثر عمومية فى المتغيرات $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ و $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ يمكن كتابتها كما يلى :

$$\begin{aligned} f(x,y) = \; & a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + \cdots + a_{1n}x_1y_n \\ & + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 + \cdots + a_{2n}x_2y_n \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + a_{m1}x_my_1 + a_{m2}x_my_2 + \cdots + a_{mn}x_my_n \end{aligned}$$

أو بالشكل المختصر :

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j \tag{16.1}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$= X'AY$$

حيث $X = [x_1, x_2, \ldots, x_m]'$ ، $A = [a_{ij}]$ ، $Y = [y_1, y_2, \ldots, y_n]'$.

تسمى مصفوفة المعاملات A ، بمصفوفة ثنائى الخطية كما تسمى رتبة المصفوفة A برتبة الصيغة .

أنظر المسألة ١

مثال ١ : صيغة ثنائى الخطية

$$x_1y_1 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = \begin{bmatrix} x_1, x_2, x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$= X'AY$$

الصيغ القانونية :

لنفرض أن المتغيرات x والتى عددها m متغيرا الواردة فى (16.1) قد استبدلت بمتغيرات جديدة u بواسطة التحويل الخطى :

$$X = BU \quad \text{أو} \quad x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}u_j, \quad (i = 1,2,\ldots,m) \tag{16.2}$$

ولنفرض أن المتغيرات y والتى عددها n متغيرا استبدلت بمتغيرات جديدة U بواسطة التحويل الخطى

$$Y = CV \quad \text{أو} \quad y_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} v_j, \qquad (i = 1,2,\dots,n) \quad (16.3)$$

فنجد $X'AY = (BU)'A(CV) = U'(B'AC)V$. والآن بتطبيق التحويلين الخطيين $U = IX$ و $V = IY$ فإننا نحصل على صيغة ثنائى خطية جديد فى المتغيرات الأصلية $X'(B'AC)Y = X'DY$.

نقول عن صيغتى ثنائيى الخطية إنهما متكافئتا فيما إذا كان (وإذا كان فقط) يوجد تحويل خطى غير شاذ يحول إحدى الصيغ الأخرى.

I. تكون صيغتا ثنائيى الخطية ، مصفوفتيهما A و B من الدرجة $m \times n$ على F متكافئتين على F إذا كانتا (وإذا كانتا فقط) من رتبة واحدة .

إذا كانت رتبة (16.1) هى r ، فإنه يوجد (أنظر الفصل ٥) مصفوفتان غير شاذتين P و Q بحيث يكون :

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

إذا أخذنا $B = P'$ فى (16.2) و $C = Q$ فى (16.3) فإن صيغة ثنائى الخطية تختزل إلى :

$$U'(PAQ)V = U'\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_rv_r \qquad (16.4)$$

أى :

II. يمكن اختزال أى شكل (صيغة) ثنائى الخطية على F ، رتبته r ، بواسطة تحويل خطى غير شاذ على F أيضا ، إلى الشكل القانونى $u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_rv_r$.

مثال ٢ : لمصفوفة الشكل ثنائى الخطية $X'AY = X'\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}Y$ الوارد فى المثال ١ :

$$\begin{matrix} I_3 \\ \\ A \;\; I_3 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 0 & -1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 0 & -1 & & & \\ 0 & 1 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} Q \\ I_3 \; P' \end{matrix}$$

وهكذا نجد أن $X = PU = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}U$, $Y = QV = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}V$ تختزل $X'AY$ إلى :

$$U'\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}V = U'I_3V = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

وتكون معادلات التحويل

$$\begin{cases} x_1 = u_1 - u_2 \\ x_2 = u_2 \\ x_3 = u_3 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} y_1 = v_1 - v_3 \\ y_2 = v_2 + v_3 \\ y_3 = v_3 \end{cases}$$

أنظر المسألة ٢

أنواع الصيغ ثنائية الخطية :

نقول عن شكل ثنائى الخطية $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i y_j = X'AY$ أنه :

متماثل	فيما إذا كانت A	متماثل
متناوب		متماثلة تخالفية
هرمتى		هرمتيـة
هرمتى متناوب		هرمتية تخالفية

التحويلات الموافقة التغيير :

اعتبر صيغة ثنائى الخطية $X'AY$ فى المجموعتين ذات n متغيران $(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ و $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$
إذا خضعت المتغيرات x والمتغيرات y لنفس التحويل $X = CU$ و $Y = CV$ فإننا نقول إن هذه المتغيرات قد تحولت بشكل موافق التغيير ويكون :

III. باستخدام التحويل الموافق التغير $X = CU$ ، $Y = CV$ ، يتحول الشكل ثنائى الخطية $X'AY$ حيث A مصفوفة مربعة من الدرجة n ، إلى الشكل ثنائى الخطية $U'(C'AC)V$.

إذا كانت المصفوفة A متماثلة فإن $C'AC$ تكون أيضا . أى :

IV. يبقى الشكل ثنائى الخطية المتماثل ، بعد تحويل موافق التغيير للمتغيرات ، متماثلا أيضا .

V. نقول على شكلين ثنائيى الخطية على F إنهما متكافئان بالنسبة للتحويلات الموافقة التغيير المتغيرات ، فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) مصفوفتاهما متطابقتان على F .

نستنتج من النظرية I من الفصل ١٥ ما يلى :

VI. يمكن تحويل شكل ثنائى الخطية ومتماثل رتبته r ، بواسطة تحويل موافق التغيير للمتغيرات غير شاذ إلى الشكل :

$$a_1x_1y_1 + a_2x_2y_2 + \cdots + a_r x_r y_r \tag{16.5}$$

من النظرية II والنظرية IV من الفصل ١٥ ينتج :

VII. يمكن تحويل شكل ثنائى الخطية حقيقى رتبته r متماثل بواسطة تحويل موافق التغير غير شاذ للمتغيرات من حقل الأعداد الحقيقية إلى الشكل :

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_py_p - x_{p+1}y_{p+1} - \cdots - x_ry_r \tag{16.6}$$

وفى حقل الأعداد المركبة إلى الشكل .

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ry_r \tag{16.7}$$

أنظر المسألة ٣

التحويل مخالف التغيير :

بفرض أن الشكل ثنائي الخطية هو ذلك الوارد في الفقرة السابقة . إذا إخضعت المتغيرات x إلى التحويل $X = (C^{-1})' U$ والمتغيرات y إلى التحويل $Y = C\,V$ فإننا نقول عن المتغيرات إنها قد تحولت بشكل مخالف التغيير .

ونجد :

VIII. باستخدام تحويل مخالف التغيير $X = (C^{-1})' U$ و $Y = C\,V$ يتحول الشكل ثنائي الخطية $X' A\,Y$ حيث A مصفوفة مربعة من الدرجة n إلى الشكل ثنائي الخطية $U' (C^{-1} A\,C)\,V$.

IX. يتحول الشكل ثنائي الخطية $X'IY = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$ إلى الشكل ذاته فيما إذا كان (وإذا كان فقط) تحويل مجموعتي المتغيرات تم بواسطة تحويل مخالف التغيير .

الشكل ثنائي الخطية القابل للتحليل لعوامل : سنبرهن في المسألة ٤ :

X. يمكن تحليل شكل ثنائي الخطية غير صفري لعوامل فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) رتبته مساوية الواحد .

مسائل محلولة

١ -
$$x_1y_1 + 2x_1y_2 - 13x_1y_3 - 4x_2y_1 + 15x_2y_2 - x_2y_3 = [x_1, x_2]\begin{bmatrix}1 & 2 & -13\\ -4 & 15 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix} = X'\begin{bmatrix}1 & 2 & -13\\ -4 & 15 & -1\end{bmatrix}Y.$$

٢-اختزل $x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_1y_3 - 2x_1y_4 + 2x_2y_1 - 2x_2y_2 + x_2y_3 + 3x_2y_4 + 3x_3y_1 + 4x_3y_3 + x_3y_4$ إلى شكل قانوني .

إن مصفوفة الصيغة هي $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & -2\\ 2 & -2 & 1 & 3\\ 3 & 0 & 4 & 1\end{bmatrix}$. من المسألة ٦ من الفصل الخامس نجد أن المصفوفتين غير الشاذتين

$P = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$ ، $Q = \begin{bmatrix}1 & 1/3 & -4/3 & -1/3\\ 0 & -1/6 & -5/6 & 7/6\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ تحققان العلاقة $PAQ = \begin{bmatrix}I_2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$. وهكذا فإن التحويلين الخطيين :

$$X = P'U \quad \text{أو} \quad \begin{cases} x_1 = u_1 - 2u_2 - u_3\\ x_2 = u_2 - u_3\\ x_3 = u_3 \end{cases} , \qquad Y = QV \quad \text{أو} \quad \begin{cases} y_1 = v_1 + \frac{1}{3}v_2 - \frac{4}{3}v_3 - \frac{1}{3}v_4\\ y_2 = -\frac{1}{6}v_2 - \frac{5}{6}v_3 + \frac{7}{6}v_4\\ y_3 = v_3\\ y_4 = v_4 \end{cases}$$

يحولان $X'AY$ إلى $u_1v_1 + u_2v_2$

٣ – حول صيغة ثنائى الخطية المتماثل $X'AY = X'\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \\ 3 & 5 & 8 & 10 \\ 2 & 8 & 10 & -8 \end{bmatrix}Y$ بواسطة تحويل موافق التغيير (أ) إلى (16.5) على حقل الأعداد الجذرية ، (ب) إلى (16.6) على حقل الأعداد الحقيقية و (جـ) إلى (16.7) على حقل الأعداد المركبة .

(أ) من المثال ١ – الفصل ١٥ – نجد أن التحويلين الخطيين $X = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -10 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}U, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -10 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}V$

يحولان $X'AY$ إلى $u_1v_1 - u_2v_2 + 4u_3v_3$.

(ب) من المثال ٢ – الفصل ١٥ – نجد أن التحويلين الخطيين $X = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}U, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}V$

يحولان $X'AY$ إلى $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$.

(جـ) من نتائج المثال ٢ من الفصل ١٥ ، يمكننا أن نجد

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{C}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2i & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

وهكذا فإن التحويلين الخطيين $Y = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -2i & -1 \\ 0 & 2 & i & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}V, \quad X = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -2i & -1 \\ 0 & 2 & i & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}U$ يحولان $X'AY$ إلى

$u_1v_1 + u_2v_2 - u_3v_3$.

٤ – برهن أنه ليكون شكل ثنائى الخطية غير صفرى $f(x, y)$ قابلا التحليل إلى عوامل فإنه يلزم ويكفى أن تكون رتبته مساوية الواحد .

لنفرض أن الشكل قابل التحليل إلى عوامل : أى أن

$$\Sigma\Sigma a_{ij}x_iy_j = (\Sigma b_ix_i)(\Sigma c_jy_j) = \Sigma\Sigma b_ic_jx_iy_j$$

وعلى ذلك $a_{ij} = b_i c_j$. إن من الواضح أن أى مصغر من الدرجة الثانية من $A = [a_{ij}]$ مثل .

$$\begin{bmatrix} a_{ij} & a_{is} \\ a_{kj} & a_{ks} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_ib_j & a_ib_s \\ a_kb_j & a_kb_s \end{bmatrix} = b_jb_s\begin{bmatrix} a_i & a_i \\ a_k & a_k \end{bmatrix}$$

يتلاشى وهذا يؤدى إلى أن رتبة A مساوية الواحد .

على العكس ، لنفرض أن الشكل ثنائى الخطية من الرتبة ١ ، إذن نجد من النظرية I أنه يوجد تحويلات خطية غير شاذة تحول الشكل المفروض إلى $U'(B'AC)V = u_1v_1$. والآن التحويلات العكسية للتحويلات

$$v_i = \sum_j s_{ij} y_j \quad , \quad u_i = \sum_j r_{ij} x_j$$

تحول $u_1 \ v_1$ إلى $f(x,y) = (\sum_j r_{ij}x_j)(\sum_j s_{ij}y_j)$ وعلى ذلك تكون $f(x, y)$ قابل التحليل إلى عوامل .

مسائل اضـــافية

٥ – أوجد تحويلات خطية تختزل كلا من الصيغ ثنائية الخطية التالية إلى الشكل القانونى (16.4)

(ا) $x_1y_1 - 2x_1y_3 + 3x_2y_1 + x_2y_2 - 3x_2y_3 - x_3y_1 - x_3y_2 - x_3y_3$

(ب) $X'\begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 & 0 \\ -4 & -11 & 2 & 7 \\ 5 & -5 & 1 & 0 \end{bmatrix}Y$, (جـ) $X'\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 8 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}Y$, $X'\begin{bmatrix} 7 & 4 & 5 & 8 \\ 4 & 7 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 12 & 6 \\ 8 & 5 & 6 & 10 \end{bmatrix}Y$

٦ – أوجد تحويلا موافق التغيير يحول :

(ا) $X'\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 14 \end{bmatrix}Y$ و (ب) $X'\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 10 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}Y$ إلى الشكل القانونى (16.6)

الجواب (ا) $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ب) $C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4\sqrt{3}/3 \\ 0 & 1 & \sqrt{3}/3 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/3 \end{bmatrix}$

٧ – إذا كانت C_1, C_2 و B_1, B_2 مصفوفات مربعة من الدرجة n غير شاذة بحيث يكون، $B_1A_1C_1 = B_2A_2C_2 = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

فأوجد التحويل الذى يحول $X'A_1Y$ إلى $U'A_2V$.

الجـــواب $X = (B_2^{-1}B_1)'U, \quad Y = C_1C_2^{-1}V$

٨ – فسر المسألة ٢٣ فى الفصل ٥ باستعمال زوج من الأشكال ثنائية الخطية .

٩ – اكتب التحويل مخالف التغيير لـ $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}U$. الجواب $Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}V$

١٠ – برهن أن تحويلا متعامدا هو تحويل مخالف التغيير مع نفسه ، أى أن $X = PU$ و $Y = PV$.

١١ – برهن النظرية IX

١٢ – إذا كان $X'AY$ شكلا ثنائى الخطية حقيقيا وغير شاذ فإننا نسمى $X'A^{-1}Y$ بأنها صيغة ثنائى الخطية العكسية. برهن أنه إذا تحولت صيغتان ثنائيتا الخطية عكسيتان بشكل مخالف التغيير بواسطة تحويل متعامد واحد، فإنه ينتج عن ذلك شكلان ثنائيا الخطية عكسيان .

١٣ – استخدم المسألة ٤ من الفصل ١٥ لكى تبرهن أنه يوجد تحويل موافق التغيير $X = PU$, $Y = PV$ يحول شكلا ثنائى الخطية ومتناوبا رتبته $r = 2t$ إلى الشكل القانونى .

$$u_1v_2 - u_2v_1 + u_3v_4 - u_4v_3 + \cdots + u_{2t-1}v_{2t} - u_{2t}v_{2t-1}$$

١٤ – عين شكلا قانونيا لشكل ثنائى الخطية متناوب هرميتى وهرميتى .

إرشاد : أنظر (15.6) و (15.7)

الفصل السابع عشر

الصيغ التربيعية (الأشكال التربيعية)

يسمى كثير الحدود المتجانس من النوع

$$q = X'AX = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \qquad (17.1)$$

والذى تكون معاملاته a_{ij} عناصر من F ، صيغة تربيعية على F فى المجاهيل $x_1, x_2 \ldots, x_n$

مثال ١ :

إن $q = x_1^2 + 2x_2^2 - 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3$ صيغة تربيعية للمتغيرات x_1, x_2, x_3 يمكن كتابة مصفوفةهذه الصيغة بطرق مختلفة معتمدة على الطريقة التى توزع بموجبها حواصل ضرب الحدود التقاطعية (التصالبية) $-4x_1x_2$ و $8x_1x_3$ لتكوين الحدود $a_{12}x_1x_2, a_{21}x_2x_1$ و $a_{13}x_1x_3, a_{31}x_3x_1$. ستتفق على أن **مصفوفة الصيغة التربيعية هى مصفوفة متماثلة** ، وسنوزع حدود حواصل الضرب التقاطعية بحيث يكون $a_{ij} = a_{ji}$ وعلى ذلك

$$q = x_1^2 + 2x_2^2 - 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3$$

$$= X'\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -7 \end{bmatrix}X$$

تسمى المصفوفة المتماثلة $A = [a_{ij}]$، **مصفوفة الشكل التربيعى** (الصيغة التربيعية) وتسمى رتبة A رتبة هذا الشكل . إذا كانت الرتبة r بحيث تكون $r < n$ فإن الشكل يدعى شاذاً وفى الحالة المعاكسة يدعى غير شاذ

التحويلات :

إن التحويل الخطى $X = B\ Y$ على F يحول الشكل التربيعى (17.1) ذا المصفوفة المتماثلة A على F إلى الشكل التربيعى .

$$(BY)'A(BY) = Y'(B'AB)Y \qquad (17.2)$$

ذى المصفوفة المتماثلة $B'AB$.

توصف صيغتان تربيعيتان فى نفس مجموعة المتغيرات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ بأنهما متكافئتان فيما إذا كان (وإذا كان فقط) يوجد تحويل خطى غير شاذ $X = B\ Y$ الذى بالإضافة إلى $Y = I\ X$ ، يحول إحدى هاتين الصيغتين إلى الصيغة الأخرى . بما أن $B'AB$ متطابق مع A ، فإنه يكون :

I. إن رتبة صيغة تربيعية تبقى ثابتة بعد إجراء تحويل غير شاذ للمتغيرات .

II. يكون شكلان تربيعيان على F متكافئين على F فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) مصفوفتاهما متطابقتين على F .

ينتج عن المسألة ١ من الفصل ١٥ أن صيغة تربيعية رتبتها r يمكن أن تختزل الشكل

$$h_1y_1^2 + h_2y_2^2 + \cdots + h_r y_r^2, \qquad h_i \neq 0 \qquad (17.3)$$

والتي توجد فيها حدود تربيعية فقط للمتغيرات بتحويل خطي غير شاذ $X = BY$.

يجدر بنا أن نذكر أن المصفوفة B هي حاصل ضرب مصفوفات أعمدة أولية بينما B' هي حاصل الضرب بترتيب معاكس ، لنفس مصفوفات الصفوف الأولية .

مثال ٢ :

اختزل $q = X'\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -7 \end{bmatrix}X$ الوارد في المثال ١ إلى الشكل (17.3)

لدينا :

$$[A\ \ I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -23 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 4 & 4 & 1 \end{array}\right] = [D\ \ B']$$

وهكذا نجد أن $X = BY = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}Y$ يحول q إلى $q' = y_1^2 - 2y_2^2 + 9y_3^2$.

أنظر المسألتين ١ - ٢

طريقة لاجرانج للاختزال :

يمكن تحقيق الإنتقال من شكل تربيعي إلى الشكل (17.3) بطريقة تعرف بطريقة لاجرانج وهي تقوم بشكل أساسي ، على تكرار عملية الإتمام إلى مربع كامل .

مثال ٣ :

$$\begin{aligned} q &= x_1^2 + 2x_2^2 - 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 \\ &= \{x_1^2 - 4x_1(x_2 - 2x_3)\} + 2x_2^2 - 7x_3^2 \\ &= \{x_1^2 - 4x_1(x_2 - 2x_3) + 4(x_2 - 2x_3)^2\} + 2x_2^2 - 7x_3^2 - 4(x_2 - 2x_3)^2 \\ &= (x_1 - 2x_2 + 4x_3)^2 - 2(x_2^2 - 8x_2x_3) - 23x_3^2 \\ &= (x_1 - 2x_2 + 4x_3)^2 - 2(x_2^2 - 8x_2x_3 + 16x_3^2) + 9x_3^2 \\ &= (x_1 - 2x_2 + 4x_3)^2 - 2(x_2 - 4x_3)^2 + 9x_3^2 \end{aligned}$$

وهكذا نجد أن

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ y_2 = x_2 - 4x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} x_1 = y_1 + 2y_2 + 4y_3 \\ x_2 = y_2 + 4y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

قد حول q إلى $y_1^2 - 2y_2^2 + 9y_3^2$.

أنظر المسألة ٣

الصيغ التربيعية الحقيقية :

نفرض الشكل التربيعى $q = X'AX$ اختزل بواسطة تحويل حقيق غير شاذ إلى الشكل (17.3) . إذا كان واحد أو أكثر من h_i سالباً ، فإنه يوجد تحويل غير شاذ $X = CZ$ ، حيث تنتج C عن B بمتتالية من تحويلات الصفوف والأعمدة من النوع ١ ، الذى يحول q إلى :

$$s_1 z_1^2 + s_2 z_2^2 + \cdots + s_p z_p^2 - s_{p+1} z_{p+1}^2 - \cdots - s_r z_r^2 \qquad (17.4)$$

والتى فيها تسبق الحدود ذات المعاملات الموجبة الحدود ذات المعاملات السالبة .

والآن التحويل غير الشاذ :

$$w_i = \sqrt{s_i}\, z_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$
$$w_j = z_j \;, \qquad (j = r+1, r+2, \ldots, n)$$

أو

$$Z = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{s_1}}, \frac{1}{\sqrt{s_2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{s_r}}, 1, 1, \ldots, 1\right) W$$

يحول (17.4) إلى الصيغة القانونية .

$$w_1^2 + w_2^2 + \cdots + w_p^2 - w_{p+1}^2 - \cdots - w_r^2 \qquad (17.5)$$

وحيث أن حاصل ضرب تحويلات غير شاذة هو تحويل غير شاذ ، فإنه يكون :

III. يمكن اختزال كل صيغة تربيعية حقيقية بواسطة تحويل حقيق غير شاذ إلى الصيغة القانونية (17.5) حيث تسمى p ، عدد الحدود الموجبة ، دليل الصيغة التربيعية المفروض و r رتبتها .

مثال ٤ :

فى المثال ٢ — الصيغة التربيعية $q = x_1^2 + 2x_2^2 - 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3$ حتزلت إلى $q' = y_1^2 - 2y_2^2 + 9y_3^2$. ان التحويل غير الشاذ $y_1 = z_1,\ y_2 = z_3,\ y_3 = z_2$ يحول q' إلى $q'' = z_1^2 + 9z_2^2 - 2z_3^2$ وإن التحويل غير الشاذ $z_1 = w_1,\ z_2 = w_2/3,\ z_3 = w_3/\sqrt{2}$ يحول q'' إلى $q''' = w_1^2 + w_2^2 - w_3^2$.

بتجميع التحويلات فإننا نجد أن التحويل الخطى غير الشاذ

$$x_1 = w_1 + \tfrac{4}{3}w_2 + \sqrt{2}\,w_3$$
$$x_2 = \tfrac{4}{3}w_2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,w_3$$
$$x_3 = \tfrac{1}{3}w_2$$

أو

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 4/3 & \sqrt{2} \\ 0 & 4/3 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} W$$

يحول q إلى $q''' = w_1^2 + w_2^2 - w_3^2$. إن الصيغة التربيعية الناتجة من الرتبة ٣ والدليل ٢ .

قانون سيلفستر للقصور :

سنبرهن فى المسألة ٥ قانون القصور :

IV. إذا اختزل شكل تربيعى حقيق بواسطة تحويلين غير شاذين إلى الصيغ القانونية (15.2) فإن هذين التحويلين يكون لها نفس الرتبة والدليل .

وهكذا فإن دليل مصفوفة متماثلة حقيقية يعتمد على المصفوفة وليس على التحويلات الأولية التى تنتج (15.2) .

إن الفرق بين عدد الحدود الموجبة وعدد الحدود السالبة $p-(r-p)$ فى (17.5) يدعى شارة الشكل التربيعى . كنتيجة للنظرية IV نجـد :

V. يكون شكلان تربيعيان كل فى n من المتغيرات متكافئين على حقل الأعداد الحقيقية ، إذا كانا (وإذا كانا فقط) من رتبة واحدة ودليل واحد أو من رتبة واحدة وشارة واحدة .

الصيغ التربيعية المركبة :

بفرض أن الشكل التربيعى المركب $X'AX$ يمكن اختزاله بتحويل غير شاذ إلى الشكل (17.3) . إن من الواضح أن التحويل غير الشاذ :

$$z_i = \sqrt{h_i}\, y_i , \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$$
$$z_j = y_j \quad , \quad (j = r+1, r+2, \ldots, n)$$

أو

$$Y = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{h_1}}, \frac{1}{\sqrt{h_2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{h_r}}, 1, 1, \ldots, 1\right) Z$$

يحول (17.3) إلى

$$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_r^2 \qquad (17.6)$$

أى :

VI. يمكن اختزال كل شكل تربيعى على حقل الأعداد المركبة رتبته r بواسطة تحويل غير شاذ على حقل الأعداد المركبة إلى الشكل القانونى (17.6) .

VII. تكون صيغتان تربيعيتان مركبتان كل فى n من المتغيرات ، متكافئتين على الحقل المركب فيما إذا كانا (وإذا كانا فقط) من رتبة واحدة .

الصيغ (الأشكال) المحددة والصيغ (الأشكال) شبه المحددة :

نقول عن شكل تربيعى ، حقيقى غير شاذ $q = X'AX$ حيث $|A| \neq 0$ فى n من المتغيرات، إنه **محدد موجب** فيما إذا كانت رتبته ودليله متساويين . وهكذا فإنه ، فى حقل الأعداد الحقيقية، يمكن اختزال شكل تربيعى محدد موجب إلى الشكل $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$ ويكون $q > 0$ لأى مجموعة من القيم غير التافهة لمجموعة المتغيرات x .

يسمى الشكل التربيعى الحقيقى الشاذ $q = X'AX$ حيث $|A| = 0$ ، شكلا **شبه محدد موجب** فيما إذا كانت رتبته ودليله متساويين ، أى إذا كان $p = r$ حيث $r < n$. وهكذا فإنه ، فى الحقل الحقيقى يمكن اختزال شكل تربيعى شبه محدد موجب إلى الشكل $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_r^2$ حيث $n > r$ ، ويكون $q \geq 0$ لأى مجموعة من القيم غير التافهة للمتغيرات x .

نقول عن شكل تربيعى حقيقى غير شاذ $q = X'AX$ إنه **محدد سالب** فيما إذا كان دليله $p = 0$ أى إذا كان $n = r$ و $p = 0$. وهكذا فإنه ، فى الحقل الحقيقى ، يمكن اختزال شكل تربيعى محدد سالب إلى الشكل $-y_1^2 - y_2^2 - \cdots - y_n^2$ ، ويكون $q < 0$ لأى مجموعة من القيم غير التافهة للمتغيرات x .

نقول عن شكل تربيعى حقيقى شاذ $q = X A' X$ ، إنه **شبه محدد سالب** ، فيما إذا كان دليله $p = 0$ ، أى إذا كان $r < n$ و $p = 0$. وهكذا فإنه فى الحقل الحقيقى ، يمكن اختزال شكل تربيعى شبه محدد سالب ، إلى الشكل $-y_1^2 - y_2^2 - \cdots - y_r^2$ ويكون $q \leq 0$ لأى مجموعة من القيم غير التافهة للمتغيرات x .

إن من الواضح أنه إذا كان q محدداً (شبه محدد) سالباً ، فإن $-q$ يكون محدداً (شبه محدد) موجباً .

يكون للشكل التربيعي المحدد الموجب :

VIII. إذا كان $q = X'XA$ محدداً موجباً فإن $|A| > 0$.

المصغرات الرئيسية :

نقول عن مصغر للمصفوفة A إنه رئيسي فيما إذا حصلنا عليه بحذف بعض صفوف A والأعمدة ذات الأرقام المماثلة . وهكذا فأن العناصر القطرية لمصغر رئيسي للمصفوفة A هي عناصر قطرية في A .

سنبرهن في المسألة ٦ :

IX. إن لكل مصفوفة متماثلة رتبتها r ، على الأقل ، مصغر رئيسي واحد من الدرجة r لايساوي الصفر .

المصفوفات المحددة وشبه المحددة :

تسمى المصفوفة A لصيغة تربيعية حقيقية $q = X'AX$ مصفوفة محددة أو شبه محددة إذا كان هذا الشكل التربيعي محدداً أو شبه محدد ويكون :

X. تكون المصفوفة الحقيقية المتماثلة A محددة موجبة فيما إذا كان (وإذا كان فقط) يوجد مصفوفة غير شاذة C بحيث تحقق العلاقة $A = C'C$.

XI. تكون المصفوفة الحقيقية المتماثلة A ذات الرتبة r يشبه محددة موجبة فيما إذا كان (وإذا كانت فقط) توجد مصفوفة C من الرتبة r وبحيث تحقق العلاقة $A = C\,C'$.

أنظـر المسألة ٧ .

XII. إذا كانت A محددة موجبة ، فإن كل مصغر رئيسي لـ A موجب .

أنظـر المسألة ٨ .

XIII. إذا كانت A شبه محددة موجبة ، فإن كل مصغر رئيسي لـ A يكون غير سالب .

الصيغ التربيعية المنتظمة :

نعرف لمصفوفة متماثلة $A = [a_{ij}]$ على F . **المصغرات الرئيسية المتقدمة** ، كما يلي :

$$p_0 = 1, \quad p_1 = a_{11}, \quad p_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad p_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad p_n = |A| \qquad (17.7)$$

سنبرهن في المسألة ٩ :

XIV. يمكن إعادة ترتيب أي مصفوفة A مربعة من الدرجة n غير شاذة بالمبادلة بين صفوف معينة والمبادلة بين الأعمدة المناظرة بحيث لايكون p_{n-1} و p_{n-2} صفريين معا .

XV. إذا كانت A مصفوفة متماثلة وكان $p_{n-2}p_n \neq 0$ و $p_{n-1} = 0$ فإن p_{n-2} و p_n يكون لهما إشارتان متضادتان .

مثال ٥ :

للصيغة التربيعية $X'AX = X'\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}X$, نجد أن $p_0 = 1,\ p_1 = 1,\ p_2 = 0,\ p_3 = 0,\ p_4 = |A| = 1.$

إن هنا $\alpha_{33} \neq 0$ إن التحويل $X = K_{34}\tilde{X}$ يؤدى إلى الشكل :

$$(i) \qquad \tilde{X}'\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}\tilde{X}$$

والذى يكون له $p_0 = 1,\ p_1 = 1,\ p_2 = 0,\ p_3 = -1,\ p_4 = 1$. وهكذا فإنه فى (i) لايكون كل من p_2 و p_3 مساويين للصفر معا .

نقول عن مصفوفة متماثلة A رتبتها r إنها مصفوفة مرتبة بإنتظام فيما إذا لم يكن حدان متتاليان p من المتوالية $p_0, p_1, \ldots, p_r$ ، صفريين . عندما تكون A مرتبة بإنتظام ، فإننا نقول إن الشكل التربيعى $X'AX$ منتظم . إن الشكل المعطى فى المثال ٥ غير منتظم ، وإن الشكل التربيعى (i) الوارد فى هذا المثال منتظم .

لتكن A مصفوفة متماثلة من الرتبة r . من النظرية IX ، تحوى A على الأقل مصغراً رئيسياً مربعاً M من الدرجة r غير متلاشى والذى يمكن وضع عناصره فى الزاوية العليا اليسرى من A . وهكذا فإن $p_r \neq 0$ بينما $p_{r+1} = p_{r+2} = \ldots = p_n = 0$.

من النظرية XIV يمكن إعادة ترتيب الـ r صفاً الأول والـ r عموداً الأول بحيث يكون واحداً على الأقل من p_{r-1} و p_{r-2} غير مساو للصفر . إذا كان $p_{r-1} \neq 0$ و $p_{r-2} = 0$ فإننا نطبق الطريقة السابقة على مصفوفة p_{r-1} ، إذا كان $p_{r-2} \neq 0$ فإننا نطبق هذه الطريقة على مصفوفة p_{r-2} وهكذا إلى أن يصبح M مرتبا بإنتظام . وعلى ذلك .

XVI. أى مصفوفة متماثلة (صيغة تربيعية) رتبتها r يمكن ترتيبها بإنتظام .

أنظـر المسألة ١٠

XVII. يكون الشكل التربيعى الحقيقى $X'AX$ محدداً موجباً فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) رتبة n وكانت جميع مصغراته الرئيسية المتقدمة موجبة .

XVIII. يكون الشكل التربيعى $X'AX$ ذو الرتبة r شبه محدد موجباً فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) كل من المصغرات الرئيسية $p_0, p_1, \ldots, p_r$ موجبة .

طريقة كرونكر للاختزال :

إن طريقة كرونكر لإختزال شكل تربيعى إلى شكل تربيعى آخر لاتظهر فيه إلا الحدود المربعة ، تقوم على مايأتى :

XIX. إذا كان $X'XA$ q شكلا تربيعياً على F فى n متغيراً من الرتبة r فإنه يمكن تطبيق تحويل خطى غيرشاذا على F ، تحوله إلى الشكل $q' = \tilde{X}'B\tilde{X}$ بحيث يقع فى الزاوية اليسرى العلوية لـ B مصغراً C من A ، ذو r صفاً وغير شاذ . علاوة على ذلك يوجد تحويل خطى على F ، غير شاذ يختزل q إلى $q'' = \tilde{X}'C\tilde{X}$, وهو شكل تربيعى غير شاذ فى r متغيراً .

XX. إذا كان $q = X'AX$ شكلا تربيعياً على F فى n متغيراً وغير شاذ وإذا كان $p_{n-1} = \alpha_{nn} \neq 0$ فإن التحويل الخطى غير الشاذ :

$$\begin{cases} x_i = y_i + \alpha_{in}y_n, & (i = 1, 2, \ldots, n-1) \\ x_n = \alpha_{nn}y_n \end{cases}$$

أو

$$X = BY = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{2n} \\ \multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \alpha_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{nn} \end{bmatrix} Y$$

يحول q إلى $\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}y_iy_j + p_{n-1}p_ny_n^2$ حيث عزل حد مربع واحد من بين المتغيرات .

مثال ٦ : الشكل التربيعي $X'AX = X'\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -7 \end{bmatrix}X$. نجد $p_2 = \alpha_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

إن التحويل الخطي غير الشاذ :

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + \alpha_{13}y_3 = y_1 - 8y_3 \\ x_2 = y_2 + \alpha_{23}y_3 = y_2 - 8y_3 \\ x_3 = \alpha_{33}y_3 = -2y_3 \end{cases}$$

أو

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}Y$$

يختزل $X'AX$ إلى :

$$Y'\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -8 & -8 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}Y = Y'\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{bmatrix}Y$$

الذي يظهر فيه المتغير y_3 بشكل مربع فقط .

XXI. إذا كان $q = X'AX$ شكلا تربيعياً غير شاذ على F وكان $\alpha_{n-1,n-1} = \alpha_{nn} = 0$ بينما $\alpha_{n,n-1} \neq 0$، فإن التحويل غير الشاذ على F :

$$\begin{cases} x_i = y_i + \alpha_{i,n-1}y_{n-1} + \alpha_{in}y_n, \quad (i = 1, 2, \ldots, n-2) \\ x_{n-1} = \alpha_{n-1,n}y_n, \quad x_n = \alpha_{n,n-1}y_{n-1} \end{cases}$$

أو

$$X = BY = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{1,n-1} & \alpha_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{2,n-1} & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \alpha_{n-2,n-1} & \alpha_{n-2,n} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \alpha_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}Y$$

يحول q إلى $\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-2} a_{ij}y_iy_j + 2\alpha_{n,n-1}p_ny_{n-1}y_n$.

إن التحويل الإضافي :

$$\begin{cases} y_i = z_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n-2) \\ y_{n-1} = z_{n-1} - z_n \\ y_n = z_{n-1} + z_n \end{cases}$$

يؤدى إلى $\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-2} a_{ij}z_iz_j + 2\alpha_{n,n-1}p_n(z_{n-1}^2 - z_n^2)$ حيث عزل حدان تربيعيان لهما إشارتين مختلفتين .

مثال ٧ : الشكل التربيعى :

$$X'AX = X'\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\2 & 4 & 3\\1 & 3 & 1\end{bmatrix}X$$

يكون $\alpha_{22} = \alpha_{33} = 0$ بينما $\alpha_{32} = -1 \neq 0.$ إن التحويل غير الشاذ .

$$X = \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\0 & 0 & -1\\0 & -1 & 0\end{bmatrix}Y \quad \text{أو} \quad \begin{cases}x_1 = y_1 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3\\x_2 = \alpha_{23}y_3\\x_3 = \alpha_{32}y_2\end{cases}$$

يختزل $X'AX$ إلى الشكل :

$$Y'\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 0 & -1\\2 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\2 & 4 & 3\\1 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\0 & 0 & -1\\0 & -1 & 0\end{bmatrix}Y = Y'\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}Y = Y'BY = y_1^2 + 2y_2y_3$$

وإن التحويل :

$$Y = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & -1\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}Z \quad \text{أو} \quad \begin{cases}y_1 = z_1\\y_2 = z_2 - z_3\\y_3 = z_2 + z_3\end{cases}$$

يحول $Y'BY$ إلى الشكل

$$Z'\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & -1\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}Z = Z'\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & -2\end{bmatrix}Z = z_1^2 + 2z_2^2 - 2z_3^2$$

اعتبر الآن شكلا تربيعياً فى n متغيراً رتبته r . من النظرية XIX يمكن اختزال q إلى $q_1 = X'AX$ حيث يكون لـ A مصغر مربع من الدرجة r غير شاذ وواقع فى الزاوية اليسرى والعلوية بينما تكون بقية العناصر أصفاراً . واستناداً إلى النظرية XVI يمكن ترتيب A بشكل نظامى .

إذا كان $p_{r-1} \neq 0$ فإنه يمكن إستعمال النظرية XX لعزل حد مربع واحد :

$$p_{r-1}p_r y_r^2 \qquad (17.8)$$

إذا كان $p_{r-1} = 0$ بينما $\alpha_{r-1,r-1} \neq 0$ فإن المبادلة بين الصفين الأخيرين ثم بين العمودين الأخيرين يؤدى إلى مصفوفة يكون فيها بالترتيب الجديد $p_{r-1} = \alpha_{r-1,r-1} \neq 0.$ بما أن $p_{r-2} \neq 0$ فإنه يمكن استخدام النظرية XX مرتين لعزل حدين مربعين

$$p_{r-2}\alpha_{r-1,r-1}y_{r-1}^2 + \alpha_{r-1,r-1}p_r y_r^2 \qquad (17.9)$$

والذى تكون إشارتاها متضاد تان وذلك لأن إشارة p_{r-2} هى عكس إشارة p_r وذلك وفقاً للنظرية X V .

إذا كان $p_{r-1} = 0$ و $\alpha_{r-1\,,\,r-1} = 0$ فإن (أنظر المسألة ٩) $\alpha_{r\,,\,r-1} \neq 0$ ويمكن إستعمال النظرية XXI لعزل حدين مربعين :

$$2\alpha_{r,\,r-1}\,p_r(y_{r-1}^2 - y_r^2) \qquad (17.10)$$

لها إشارتان مختلفتان .

يمكن تكرار هذه الطريقة حتى يختزل الشكل التربيعى المعطى إلى شكل تربيعى آخر لايحوى سوى حدود مربعة المتغيرات .
يكون الحد المعزول من (17.8) موجباً أو سالباً بحسب ما تكون للمتوالية p_r ، p_{r-1} إشارة ثابتة أو تغيرا فى الاشارة . من الملاحظ فى (17.9) و (17.10) أن المتواليتين : $p_{r-2}, \alpha_{r-1,\,r-1}, p_r$ و $p_{r-2}, \alpha_{r,\,r-1}, p_r$ تحويان ثباتاً واحداً فى الإشارة وتغيراً واحداً فى الاشارة بغض النظر عن إشارة $\alpha_{r-1,\,r-1}$ و $\alpha_{r,\,r-1}$. وعلى ذلك .

XXII إذا اختزل الشكل التربيعى $q = X'AX$ المنتظم ذا الرتبة r إلى شكل تربيعى قانونى بطريقة كرونكر فإن عدد الحدود الموجبة يساوى تماماً عدد الحالات التى تبقى فيها الإشارة ثابتة فى المتوالية $p_0 , p_1 , p_2 , \cdots , p_r$، وأن عدد الحدود السالبة يساوى تماماً عدد الحالات التى تتغير فيها الاشارة ، فى هذه المتوالية . ويمكن حساب الصفر فى المتوالية إما حداً موجباً أو حداً سالباً ولكنه يجب أن يحسب .

أنظـــر المسائل ١١ – ١٣

الشكل التربيعى القابل للتحليل الى عوامل : لتكن $X'AX \neq 0$ ذات المعاملات المركبة هى الصيغة التربيعية المعطية .
لنفرض أن $X'AX$ قد حلل لعوامل من الشكل

$$X'AX \;=\; (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)(b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n) \qquad \text{(i)}$$

إذا كانت العوامل مستقلة خطياً فإنه يوجد على الأقل مصفوفة من الشكل $\begin{bmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{bmatrix}$ غير شاذة . لنفرض أنه أعيد ترقيم المتغيرات ومعاملاتها بحيث نأخذ $\begin{bmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{bmatrix}$ الشكل $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$

إن التحويل غير الشاذ :

$$\begin{cases} y_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \\ y_2 = b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n \\ y_3 = x_3, \; \ldots, \; y_n = x_n \end{cases}$$

يحول (i) إلى $y_1\,y_2$ ذى الرتبة 2 . إذن (i) تكون من الرتبة 2 أيضاً .

إذا كانت العوامل مرتبطة خطياً أى يوجد على الأقل عنصر $a_i \neq 0$. لنفرض أنه أعيد ترقيم المتغيرات ومعاملاتها بحيث يأخذ a_i موضع a_1 . إن التحويل غير الشاذ

$$\begin{cases} y_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \\ y_2 = x_2, \; \ldots, \; y_n = x_n \end{cases}$$

يحول (i) إلى $\frac{b_1}{a_1}y_1^2$ ذى الرتبة 1 . أى أن (i) من الرتبة 1 أيضا .

على العكس إذا كان $X'AX$ من الرتبة 1 أو 2 فإنه يمكن اختزاله على التوالى بالنظرية VI إلى y_1^2 أو $y_1^2+y_2^2$ ويمكن كتابة كل من هذين الشكلين ، فى الحقل المركب ، كحاصل ضرب عاملين خطيين .

ونكون بهذا قد برهنا :

XXIII. يمكن وضع شكل تربيعى ذى عوامل مركبة $X'AX \neq 0$ بشكل حاصل ضرب معاملين خطيين فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) رتبته $r \leq 2$.

مســائل محلولة

١ – اختزل
$$q = X'AX = X'\begin{bmatrix}1&2&3&2\\2&3&5&8\\3&5&8&10\\2&8&10&-8\end{bmatrix}X$$
إلى الشكل (17.3)

من المثال ١ – الفصل ١٥ ،

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{cccc|cccc}1&2&3&2&1&0&0&0\\2&3&5&8&0&1&0&0\\3&5&8&10&0&0&1&0\\2&8&10&-8&0&0&0&1\end{array}\right] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&-1&0&0&-2&1&0&0\\0&0&4&0&-10&4&0&1\\0&0&0&0&-1&-1&1&0\end{array}\right] = [D \mid P']$$

وهكذا فإن التحويل
$$X = PY = \begin{bmatrix}1&-2&-10&-1\\0&1&4&-1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}Y$$
يختزل q إلى الشكل المطلوب $y_1^2 - y_2^2 + 4y_3^2$.

٢ – اختزل
$$q = X'AX = X'\begin{bmatrix}1&2&2\\2&4&8\\2&8&4\end{bmatrix}X$$
للصيغة (17 . 3)

نجـد :

$$[A \mid I] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&8&0&-4&1&1\\0&0&-2&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right] = [D \mid P']$$

وهكذا فإن التحويل
$$X = PY = \begin{bmatrix}1&-4&0\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}Y$$
يختزل q إلى $y_1^2 + 8y_2^2 - 2y_3^2$.

٣ – اختزال لاجرانج .

(أ)

$$\begin{aligned}
q &= 2x_1^2 + 5x_2^2 + 19x_3^2 - 24x_4^2 + 8x_1x_2 + 12x_1x_3 + 8x_1x_4 + 18x_2x_3 - 8x_2x_4 - 16x_3x_4\\
&= 2\{x_1^2 + 2x_1(2x_2+3x_3+2x_4)\} + 5x_2^2 + 19x_3^2 - 24x_4^2 + 18x_2x_3 - 8x_2x_4 - 16x_3x_4\\
&= 2\{x_1^2 + 2x_1(2x_2+3x_3+2x_4) + (2x_2+3x_3+2x_4)^2\}\\
&\qquad + 5x_2^2 + 19x_3^2 - 24x_4^2 + 18x_2x_3 - 8x_2x_4 - 16x_3x_4 - 2(2x_2+3x_3+2x_4)^2\\
&= 2(x_1+2x_2+3x_3+2x_4)^2 - 3\{x_2^2 + 2x_2(x_3+4x_4)\} + x_3^2 - 32x_4^2 - 40x_3x_4\\
&= 2(x_1+2x_2+3x_3+2x_4)^2 - 3(x_2+x_3+4x_4)^2 + 4(x_3-2x_4)^2
\end{aligned}$$

وهكذا فإن التحويل
$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 \\ y_2 = \quad x_2 + x_3 + 4x_4 \\ y_3 = \quad x_3 - 2x_4 \\ y_4 = \quad x_4 \end{cases}$$
يختزل q إلى $2y_1^2 - 3y_2^2 + 4y_3^2$

(ب) الشكل التربيعى المسألة ٢ نجد ،

$$q = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2^2 + 16x_2x_3 + 4x_3^2 = (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 + 8x_2x_3$$

بما أن الشكل الأخير لايحوى حدوداً فى x_2^2 أو x_3^2 بل يحوى حداً فى $x_2\ x_3$ فإننا نستعمل التحويل غير الشاذ :

(i) $$x_1 = z_1, \quad x_2 = z_2, \quad x_3 = z_2 + z_3$$

الحصول على :

$$q = (z_1+4z_2+2z_3)^2 + 8z_2^2 + 8z_2z_3 = (z_1+4z_2+2z_3)^2 + 8(z_2+\tfrac{1}{2}z_3)^2 - 2z_3^2 = y_1^2 + 8y_2^2 - 2y_3^2$$

والآن $Y = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Z$ ومن (i) $Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} X$ وهكذا، $Y = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} X.$

أى أن التحويل غير الشاذ $X = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} Y$ يقوم بالاختزال المطلوب .

٤ – باستخدام نتيجة المسألة ٢ نحصل على

$$[A \mid I] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

وبتطبيق التحويلين $H_2(\frac{1}{4}\sqrt{2}), K_2(\frac{1}{4}\sqrt{2})$ و $H_3(\frac{1}{2}\sqrt{2}), K_3(\frac{1}{2}\sqrt{2})$, نحصل على :

$$[A \mid I] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} \end{array}\right] = [C \mid Q']$$

وهكذا فإن التحويل $X = QY = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} \end{bmatrix} Y$ ، يختزل $q = X'\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix} X$

إلى الشكل القانونى $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

٥ – برهن أنه إذا تحول شكل تربيعى حقيقى q بواسطة تحويلين غير شاذين إلى شكلين متميزين مثل :

(i) $$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - y_{p+2}^2 - \cdots - y_r^2$$

و

(ii) $$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_q^2 - y_{q+1}^2 - y_{q+2}^2 - \cdots - y_r^2$$

فإن $p = q$.

لنفرض أن $q > p$ وليكن $X = F\,Y$ التحويل الذى يؤدى إلى (i) و $X = G\,Y$ التحويل الذى يؤدى إلى II وبذلك يحول التحويلان :

$$Y = F^{-1}X = \begin{pmatrix} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \cdots + b_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

و

$$Y = G^{-1}X = \begin{pmatrix} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \cdots + c_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

على الترتيب I و (ii) إلى q . وهكذا نجد :

(iii)

$$\begin{aligned}
&(b_{11}x_1+b_{12}x_2+\cdots+b_{1n}x_n)^2 + \cdots + (b_{p1}x_1+b_{p2}x_2+\cdots+b_{pn}x_n)^2 \\
&\quad - (b_{p+1,1}x_1+b_{p+1,2}x_2+\cdots+b_{p+1,n}x_n)^2 - \cdots - (b_{r1}x_1+b_{r2}x_2+\cdots+b_{rn}x_n)^2 \\
&= (c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1n}x_n)^2 + \cdots + (c_{q1}x_1+c_{q2}x_2+\cdots+c_{qn}x_n)^2 \\
&\quad - (c_{q+1,1}x_1+c_{q+1,2}x_2+\cdots+c_{q+1,n}x_n)^2 - \cdots - (c_{r1}x_1+c_{r2}x_2+\cdots+c_{rn}x_n)^2
\end{aligned}$$

اعتبر $r - q + p > r$ معادلة :

$$\begin{cases} c_{q+1,1}x_1 + c_{q+1,2}x_2 + \cdots + c_{q+1,n}x_n = 0 \\ c_{q+2,1}x_1 + c_{q+2,2}x_2 + \cdots + c_{q+2,n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{r1}x_1 + c_{r2}x_2 + \cdots + c_{rn}x_n = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = 0 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{p1}x_1 + b_{p2}x_2 + \cdots + b_{pn}x_n = 0 \end{cases}$$

نستنتج من النظرية IV الفصل ١٠ إن لهذه المجموعة حلا غير تافه وليكن $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ مثلا . إذا عوضنا هذا الحل فى (iii) فإننا نجد :

$$\begin{aligned}
&(b_{p+1,1}\alpha_1 + b_{p+1,2}\alpha_2 + \cdots + b_{p+1,n}\alpha_n)^2 - \cdots\cdots - (b_{r1}\alpha_1 + b_{r2}\alpha_2 + \cdots + b_{rn}\alpha_n)^2 \\
&= (c_{11}\alpha_1 + c_{12}\alpha_2 + \cdots + c_{1n}\alpha_n)^2 + \cdots\cdots + (c_{q1}\alpha_1 + c_{q2}\alpha_2 + \cdots + c_{qn}\alpha_n)^2
\end{aligned}$$

إن من الواضح أن هذا يتطلب أن كل الحدود المربعة مساوية للصفر ولكن لا F ولا G غير شاذ على النقيض لما هو مفروض . على ذلك $q \geq p$. وإذا أعدنا هذا البرهان لحالة $q > p$ فسوف نتوصل إلى تناقض آخر أى أنه يجب أن يكون $p = q$.

٦ – برهن أنه يوجد على الأقل ، لكل مصفوفة متماثلة A من الرتبة r ، مصغر رئيسى من الدرجة r لايساوى الصفر.

بما أن A من الرتبة r فإن لها ، على الأقل مصغر مربع من الدرجة r لايساوى الصفر . لنفرض أن هذا المصغر واقع فى الصفوف ذات الأرقام $i_1, i_2, \ldots, i_r$. ولنفرض أننا نقلنا هـــذه الصفوف بحيث تحتل مواقع الـ r صفاً

الأول المصفوفة ولنفرض أيضاً ، أننا نقلنا الأعـــدة ذات الأرقام $i_1, i_2, \ldots, i_r$ بحيث تحتل مواقع الـ r عموداً الأول .

والآن إن الصفوف الـ r الأول مستقلة خطياً بينما كل الصفوف الأخرى تراكيب خطية لها . فإذا أخذنا تراكيب خطية مناسبة للصفوف الـ r الأول المذكورة وأضفنا هذه التراكيب إلى الصفوف الـ $(n-r)$ الباقية فإنه يمكن جعل هذه الصفوف أصفاراً . بما أن A مصفوفة متماثلة فإن عمليات مماثلة على الأعمدة تجعل الأعمدة الـ $(n-r)$ الأخيرة أصفاراً ، وهكذا نجد :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \cdots & a_{i_1 i_r} & \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \cdots & a_{i_2 i_r} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{i_r i_1} & a_{i_r i_2} & \cdots & a_{i_r i_r} & \\ \hline & & 0 & & 0 \end{array}\right]$$

حيث يقع مصغر غير متلاشي فى الزاوية اليسرى العلوية من المصفوفة . ومن الواضح أن هذا المصغر مصغر رئيسى لـ A .

٧ – برهن أن مصفوفة حقيقية متماثلة A ذات رتبة r تكون شبه محددة موجبة فيما إذا كان (وإذا كان فقط) توجد مصفوفة C من الرتبة r بحيث يكون $A = C'C$.

بما أن A من الرتبة r فإن شكلها القانونى هو $N_1 = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. أى توجد مصفوفة غير شاذة B بحيث يكون $A = B'N_1B$ وبما أن $N_1' = N_1 = N_1^2$ ، فإنه يكون $A = B'N_1B = B'N_1N_1B = B'N_1' \cdot N_1B$. لنفرض $C = N_1B$; فتكون C من الرتبة r و $A = C'C$ كما هو مطلوب .

على العكس لنفرض أن C هى مصفوفة حقيقية مربعة من الدرجة n والرتبة r فإن رتبة المصفوفة $A = C'C$ هى s حيث $r \geq s$. لنفرض أن شكلها القانونى هو :

$$N_2 = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_s, 0, 0, \ldots, 0)$$

حيث كل d_i أما أن يساوى $+1$ أو -1 . أى أنه توجد مصفوفة حقيقية غير شاذة E بحيث يكون $E'(C'C)E = N_2$. لنفرض $CE = B = [b_{ij}]$. بما أن $B'B = N_2$ فإننا نجد :

$$b_{i1}^2 + b_{i2}^2 + \cdots + b_{in}^2 = d_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

و

$$b_{j1}^2 + b_{j2}^2 + \cdots + b_{jn}^2 = 0, \quad (j = s+1, s+2, \ldots, n)$$

إن من الواضح أن كل $0 < d_i$ وأن A شبه محددة موجبة .

٨ – برهن أنه إذا كانت A محددة موجبة فإن كل مصغر رئيسى لـ A يكون موجباً .

لنفرض $q = X'AX$. إن المصغر الرئيسى لـ A الناتج عن حذف الصف والعمود اللذين رقمهما i هو المصفوفة A_i للشكل التربيعى q_1 الذى ينتج عن q بوضع $x_i = 0$. والآن كل قيمة لـ q_i ، لمجموعة غير تافهة من القيم المعطاة لمتغيراته، هى قيمة أيضاً لـ q وعلى ذلك فهى موجبة . أى أن A_i محدد موجب .

يمكن تكرار هذا البرهان للمصغرات الرئيسية $A_{ij}, A_{ijk}, \ldots$ الناتجة عن A بعد حذف اثنين ، ثلاثة . . . من صفوف A ونفس الأعـــدة .

من النظرية V1 يكون $A_i > 0, A_{ij} > 0, \ldots$: أى أن كل مصغر رئيسى موجب

٩ – برهن أنه يمكن إعادة ترتيب كل مصفوفة مربعة غير شاذة ومن الدرجة n ، $A = [a_{ij}]$ بالمبادلة بين صفوف معينة منها والمبادلة بين الأعمدة المناظرة بحيث لايكون p_{n-1} و p_{n-2} معدومين معا .

إن من الواضح أن هذه النظرية صحيحة لمصفوفة A من الدرجة 1 أو من الدرجة 2 وعلاوة على ذلك ، فإنها صحيحة لمصفوفة A درجتها $n>2$ عندما يكون $p_{n-1} = \alpha_{nn} \neq 0$. لنفرض أن $\alpha_{nn} = 0$; فيكون إما (١) بعض $\alpha_{ii} \neq 0$ لايساوى الصفر وإما (ب) كل $\alpha_{ii}=0$.

لنفرض (١) بعض $\alpha_{ii} \neq 0$ فإذا نقلنا الصف ذا الرقم i والعمود ذا الرقم i إلى موقعي الصف والعمود الأخيرين فإنه يكون المصفوفة الجديدة . $p_{n-1} = \alpha_{ii} \neq 0$

لنفرض الآن (ب) كل $\alpha_{ii}=0$. بما أن $|A| \neq 0$ فإن واحداً على الأقل من $\alpha_{ni} \neq 0$. لننقل الصف ذا الرقم i إلى موضع الصف ذى الرقم $(n-1)$ والعمود ذا الرقم i إلى موضع العمود ذا الرقم $(n-1)$. فيكون فى المصفوفة الجديدة $\alpha_{n-1,n} = \alpha_{n,n-1} \neq 0.$ استناداً إلى (6.6) نجد :

$$\begin{vmatrix} \alpha_{n-1,n-1} & \alpha_{n-1,n} \\ \alpha_{n,n-1} & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_{n-1,n} \\ \alpha_{n-1,n} & 0 \end{vmatrix} = -\alpha^2_{n-1,n} = p_{n-2}p_n$$

و $p_{n-2} \neq 0$.

لاحظ أن هذا يبرهن النظرية XV أيضاً .

١٠ – أعد ترقيم المتغيرات بحيث يصبح $q = X'AX = X'\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}X$ منتظماً .

نجد هنا أن $p_0 = 1,\ p_1 = 0,\ p_2 = 0,\ p_3 = -4,\ p_4 = -3.$ وبما أن $p_1 = p_2 = 0,\ p_3 \neq 0,$ فإننا ندرس المصفوفة $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ لـ p_3 . إن المعامل المرافق ، $B_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \neq 0;$ وإن المبادلة بين الصف الثانى والثالث ثم بين العمود الثانى والثالث من A يعطينا :

$$X'\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}X$$

حيث يكون $p_0 = 1,\ p_1 = 0,\ p_2 = -4,\ p_3 = -4,\ p_4 = -3.$ وتكون ، هنا ، x_2 قد رقمت x_3 و x_3 قد رقمت x_2

١١ – اختزل بطريقة كرونكر $q = X'\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 3 & 4 \end{bmatrix}X.$

نجد هنا أن $p_0 = 1,\ p_1 = 1,\ p_2 = -3,\ p_3 = 20,\ p_4 = -5$ وأن q منتظم . إن متوالية الـ p تحوى ثباتاً واحداً وثلاثة تغيرات فى الإشارة وإن الشكل المختزل يحوى حداً واحداً موجباً وثلاثة حدود سالبة .

بما أن كل $p_i \neq 0$ فان تكرار استعمال النظرية XIX يؤدى بنا إلى الشكل المختزل

$$p_0p_1y_1^2 + p_1p_2y_2^2 + p_2p_3y_3^2 + p_3p_4y_4^2 = y_1^2 - 3y_2^2 - 60y_3^2 - 100y_4^2$$

١٢ – اختزل بطريقة كرونكر

$$q = X'AX = X'\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 9 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} X.$$

إن A هنا من الرتبة 3 و $\alpha_{33} \neq 0$ وإن مبادلة بين الصفين الأخيرين ثم بين العمودين الآخيرين تحول A إلى

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 9 \end{bmatrix}$ حيث $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \neq 0.$ بما أن B من الرتبة الثالثة فإنه يمكن اختزالها إلى الشكل $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

وهكذا فإن q قد اختزل إلى الشكل $\tilde{X}'C\tilde{X} = \tilde{X}'\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}\tilde{X}$ ويكون لهذا الشكل $p_0 = 1,\ p_1 = 1,\ p_2 = 0,\ p_3 = -1.$

يجب أن يحوى الشكل المختزل حدين موجبين وحداً واحداً سالباً . بما أن $p_2 = 0$ بينما $\gamma_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$، و لشكل المختزل يكون استناداً إلى (16.8)

$$p_0p_1y_1^2 + p_1\gamma_{22}y_2^2 + \gamma_{22}p_3y_3^2 = y_1^2 + 4y_2^2 - 4y_3^2$$

١٣ – اختزل بطريقة كرونكر

$$q = X'\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} X.$$

نجد هنا $p_0 = 1,\ p_1 = 1,\ p_2 = 0,\ p_3 = -9,\ p_4 = 27$; وأن الشكل المختزل سيحوى حدين موجبين وحدين سالبين . اعتبر $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ مصفوفة p_3 . بما أن $\beta_{33} = 0$ بينما $\beta_{32} = -3 \neq 0$ فإن الشكل المختزل يكون بواسطة (16.8) و (16.9) هو :

$$p_0p_1y_1^2 + 2\beta_{32}p_3(y_2^2 - y_3^2) + p_3p_4y_4^2 = y_1^2 + 54y_2^2 - 54y_3^2 - 243y_4^2$$

١٤ – برهن أنه لمجموعة من المتجهات الحقيقية ذات n مركبة $X_1, X_2, \ldots, X$ يكون

$$|G| = \begin{vmatrix} X_1\cdot X_1 & X_1\cdot X_2 & \cdots & X_1\cdot X_p \\ X_2\cdot X_1 & X_2\cdot X_2 & \cdots & X_2\cdot X_p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ X_p\cdot X_1 & X_p\cdot X_2 & \cdots & X_p\cdot X_p \end{vmatrix} \geq 0$$

حيث تتحق المساواة إذا كانت (وإذا كانت فقط) هذه المجموعة مرتبطة خطياً .

(ا) لنفرض أن المتجهات X_i مستقلة خطياً ولنفرض $X = [x_1, x_2, \ldots, x_p]' \neq 0.$ فيكون $Z = \sum_{i=1}^{p} X_i x_i \neq 0$

و

$$0 < Z\cdot Z = (\sum_{i=1}^{p} X_i x_i)\cdot(\sum_{j=1}^{p} X_j x_j) = X'(X_i'X_j)X = X'(X_i\cdot X_j)X = X'GX$$

وحيث أن هذا الشكل التربيعي محدد موجب $|G|>0$.

(ب) لنفرض أن المتجهات X_i مرتبطة خطياً فإنه توجد مقادير عددية $k_1, k_2, \ldots, k_p,$ ليست كلها أصفاراً بحيث

$\xi = \sum_{i=1}^{p} k_i X_i = 0$ ينتج عن ذلك ؛

$$X_j \cdot \xi = k_1 X_j \cdot X_1 + k_2 X_j \cdot X_2 + \cdots + k_p X_j \cdot X_p = 0, \quad (j = 1,2,\ldots,p)$$

وهكذا فإنه يكون لمجموعة المعادلات الخطية المتجانسة :

$$X_j \cdot X_1 x_1 + X_j \cdot X_2 x_2 + \cdots + X_j \cdot X_p x_p = 0, \quad (j = 1,2,\ldots,p)$$

حل غير تافه $x_i = k_i,\ (i = 1,2,\ldots,p)$، ويكون $|G| = 0$.

لقد برهنا أنه $|G| \geq 0$ ولبرهان عكس (ب) علينا فقط أن نفرض أن $|G| = 0$ ونعكس مراحل (ب) لكى نحصل على $X_j \cdot \xi = 0,\ (j = 1,2,\ldots,p)$ حيث $\xi = \sum_{i=1}^{p} k_i X_i$. وهكذا فإن $\xi = 0$، $\sum_{j=1}^{p} k_j X_j \cdot \xi = \xi \cdot \xi = 0$ وأن المتجهات المعطية X_i تكون مرتبطة خطياً .

مسائل اضافية

١٥ – اكتب الأشكال التربيعية التالية فى صورة المصفوفات :

(ا) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2$ (ب) $2x_1^2 - 6x_1x_2 + x_3^2$ (جـ) $x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 8x_2x_3$

الجـــواب (ا) $X'\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}X$ (ب) $X'\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}X$ (جـ) $X'\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -4 \\ 3 & -4 & -3 \end{bmatrix}X$

١٦ – اكتب بالتفصيل الشكل التربيعى فى المتغيرات x_1, x_2, x_3 الذى مصفوفته هى $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & -5 \end{bmatrix}$.

الجـــواب : $2x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 - 5x_3^2$.

١٧ – اختزل بطريقة المسألة ١ وبطريقة لا جرانج للاختزال :

(ا) $X'\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & -2 \\ 4 & -2 & 18 \end{bmatrix}X$ (ب) $X'\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \end{bmatrix}X$ (جـ) $X'\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}X$ (د) $X'\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}X$

الجـــواب : (ا) $y_1^2 + 2y_2^2 - 48y_3^2$ (ب) $y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2$ (جـ) $y_1^2 - y_2^2 + 8y_3^2$ (د) $y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$

إرشاد : استخدم فى (جـ) و (د) $x_1 = z_3,\ x_2 = z_1,\ x_3 = z_2$.

١٨ – (ا) برهن أن $X'\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}X = X'\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}X$ ولكن المصفوفتين لهما رتبتان مختلفتان .

(ب) برهن أن المصفوفة المماثلة لشكل تربيعى وحيدة .

١٩ – برهن أن $x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_2x_3$ و $9x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_2 - 6x_1x_3 - 8x_2x_3$ متكافئتان على الحقل الحقيقى .

٢٠ – برهن : تكون مصفوفة حقيقية متماثلة ، محددة موجبة (سالبة) إذا كانت (وإذا كانت فقط) متطابقة على الحقل الحقيقى لـ I ($-I$) .

٢١ – برهن أنه يمكن اختزال $X'AX$ الوارد فى المسألة ١٢ إلى $\tilde{X}'C\tilde{X}$ بواسطة $X = R\tilde{X}$، حيث $R = K_{34}K_{41}(-5)K_{42}(1)$. ومن ثم برهن النظرية XIX .

٢٢ – (أ) برهن أنه إذا كان شكلان تربيعيان حقيقيان للمتغيرات نفسها ، موجبان محددان ، فإن الحال يكون كذلك بالنسبة لمجموعهما .

(ب) برهن أنه إذا كان q_1 شكلا تربيعياً محدداً موجباً فى $x_1, x_2, \ldots, x_s$ وكان q_2 شكلا تربيعياً محدداً موجباً فى $x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_n$، فإن $q = q_1 + q_2$ يكون شكلا تربيعياً محدداً موجباً فى $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

٢٣ – برهن أنه إذا كانت C مصفوفة حقيقية غير شاذة فإن $C'C$ تكون محددة موجبة .

إرشاد : اعتبر $X'IX = Y'C'ICY$.

٢٤ – برهن أنه يمكن كتابة كل مصفوفة محددة موجبة A بالشكل $A = C'C$. (إن المسألتين ٢٣ و ٢٤ تتمان برهان النظرية X) .

إرشاد : اعتبر $D'AD = I$.

٢٥ – برهن أنه إذا كانت المصفوفة الحقيقية المتماثلة A ، محددة موجبة فإن A^p تكون كذلك حيث p أى عدد صحيح موجب .

٢٦ – برهن أنه إذا كانت A مصفوفة حقيقية متماثلة و محددة موجبة وكانت المصفوفتان C, B محققتين للعلاقتين $B'AB = I$ و $A = C'C$ فإن CB تكون مصفوفة متعامدة .

٢٧ – برهن أن كل مصغر رئيسى لمصفوفة شبه محددة موجبة A يكبر أو يساوى الصفر .

٢٨ – برهن أن $ax_1^2 - 2bx_1x_2 + cx_2^2$ محدد موجبة فيما إذا كان (وإذا كان فقط) $0 < a$ و $|A| = ac - b^2 > 0$.

٢٩ – حقق تأثير التحويلين الواردين فى النظريتين XX و XXI .

٣٠ – بعد تغيير ترقيم المتغيرات ، إذا كان ذلك ضرورياً ، حول مايلى ، بواسطة طريقة كرونكر ، للاختزال ، إلى شكل قانونى :

(أ) $X'\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}X$

(ب) $X'\begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}X$

(جـ) $X'\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}X$

(د) $X'\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 6 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}X$

(هـ) $X'\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}X$

(و) $X'\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}X$

(ز) $X'\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}X$

(ح) $X'\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}X$

إرشاد : فى (ز) أعد ترقيم المتغيرات لتحصل على (هـ) وقم أيضاً بما ورد فى المسألة ١٧ (د) .

الجواب : (أ) $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ ؛ $p_0 = p_1 = p_2 = p_3 = 1$ (هـ) $y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$ ؛ $p_0 = p_1 = 1,\ \alpha_{22} = -1,\ p_3 = -1$

(ب) $4y_1^2 - 16y_2^2 + 16y_3^2$ (و) $y_1^2 + 128y_2^2 - 128y_3^2$ ؛ $p_0 = p_1 = 1,\ \alpha_{23} = -4,\ p_3 = -16$

(جـ) $y_1^2 - 4y_2^2 + 4y_3^2 - 3y_4^2$ (ز) أنظــر (هـ)

(د) $y_1^2 - 8y_2^2$ (ح) $4y_1^2 - 16y_2^2 + 16y_3^2 + 12y_4^2$.

٣١ – برهن أنه يمكن تحليل الشكل

$q = x_1^2 - 6x_2^2 - 6x_3^2 - 3x_4^2 - x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_1x_4 + 13x_2x_3 - 11x_2x_4 + 9x_3x_4$ إلى حاصل ضرب عوامل .

الفصل الثامن عشر

الصيغ الهرميتية

ان الشكل (الصيغة) المعروف بـ :

$$h = \bar{X}'HX = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_{ij}\bar{x}_i x_j, \qquad \bar{h}_{ij} = h_{ji} \tag{18.1}$$

حيث H مصفوفة هرميتية ومركبات X من حقل الأعداد المركبة ، يدعى شكلا هرميتيه (صيغة هرميتيه). تدعى رتبة H برتبة هذا الشكل . إذا كانت الرتبة r حيث $n>r$ فإن هذا الشكل يدعى شاذاً وفى الحالة المخالفة يدعى غير شاذ .

إذا كان H و X حقيقيين فإن (18.1) يكون شكلا حقيقياً تربيعياً ، إننا سوف نجد هنا أن النظريات ستكون مشابهة لتلك الواردة فى الفصل ١٧ ولكن البراهين ستختلف قليلا عن تلك الواردة فى الفصل المذكور .

بما أن H هرميتيه فإن كل h_{ii} حقيقى وأن كل $h_{ii}\bar{x}_i x_i$ حقيقى أيضاً ، وعلاوة على ذلك سيكون لزوج حاصل الضرب التقاطعيين $h_{ij}\bar{x}_i x_j$ ، $h_{ji}\bar{x}_j x_i$,

$$h_{ij}\bar{x}_i x_j + h_{ji}\bar{x}_j x_i = h_{ij}\bar{x}_i x_j + \bar{h}_{ij} x_i \bar{x}_j$$

حقيقية . وهكذا نجـد :

I إن قيم الشكل الهرميتى حقيقية .

إن التحويل الخطى غير الشاذ $X=BY$ يحول الشكل الهيرمى (18.1) إلى شكل هرميتى آخر .

$$(\overline{BY})'H(BY) = \bar{Y}'(\bar{B}'HB)Y \tag{18.2}$$

نقول عن شكلين هرميتيين فى نفس مجموعة المتغيرات x_i ، إنهما متكافئان إذا كان (وإذا كان فقط) يوجد تحويل خطى غير شاذ $X=BY$ يحول بالإضافة إلى $Y=IX$ أحد هذين الشكلين إلى الآخر . بما أن $\bar{B}'HB$ و H مصفوفتان مقترنتان فإنه يكون :

II لاتتغير رتبة شكل هرميتى بتحويل غير شاذ للمتغيرات .

و

III يكون شكلان هرميتيان متكافئين إذا كانت (وإذا كانت فقط) مصفوفتاهما مقترنتين .

الاختزال لشكل قانونى :

يمكن اختزال شكل هرميتى (18.1) رتبته r إلى الشكل القطرى :

$$k_1\bar{y}_1 y_1 + k_2\bar{y}_2 y_2 + \cdots + k_r\bar{y}_r y_r, \qquad \text{حيث } k_i \neq 0 \text{ وحقيقى} \tag{18.3}$$

باستخدام تحويل خطى غير شاذ $X=BY$ يتضح من (18.2) أن B حاصل ضرب مصفوفات أعمدة أولية بينما $\bar{B}'$ هى حاصل ضرب ، بترتيب معاكس ، لمصفوفات الصفوف الأولية المرافقة .

باستخدام تحويل خطى آخر ، يمكن تحويل (18.3) إلى الشكل القانونى (أنظر (15.6))

$$\bar{z}_1 z_1 + \bar{z}_2 z_2 + \cdots + \bar{z}_p z_p - \bar{z}_{p+1} z_{p+1} - \cdots - \bar{z}_r z_r \qquad (18.4)$$

الذى دليله p وشارته $p-(r-p)$. وهنا أيضاً ، تعتمد p على الصيغة المعطاة ولا يعتمد على التحويل الذى حول هذا الشكل إلى (18.4) .

IV. يكون شكلان هرميتيان فى نفس مجموعة المجاهيل والتى عددها n ، متكافئين ، إذا كان (وإذا كان فقط) لها الرتبة ذاتها والدليل ذاته أو الرتبة ذاتها ونفس الشارة .

الأشكال المحددة والأشكال شبه المحددة :

يسمى الشكل الهرميتى غير الشاذ $h = \bar{X}'HX$ فى n متغيراً ، شكلا محدداً موجباً إذا كان كل من رتبته ودليله مساوياً n أى أنه يمكن اختزال شكل هرميتى محدد موجب إلى الشكل $\bar{y}_1 y_1 + \bar{y}_2 y_2 + \cdots + \bar{y}_n y_n$ ويكون $o<h$ لأى مجموعة غير تافهة من قيم المتغيرات x .

نقول عن شكل هرميتى شاذ $h = \bar{X}'HX$ إنه شبه محدد موجب إذا كانت رتبته مساوية لدليله أى $r=p$ حيث $n>p$. أى أن يمكن تحويل شكل هرميتى شبه محدد موجب إلى $\bar{y}_1 y_1 + \bar{y}_2 y_2 + \cdots + \bar{y}_r y_r$ ، $r<n$ ، وأن $o \leqq h$ لأى مجموعة غير تافهة من قيم المتغيرات x .

تدعى المصفوفة H للشكل الهرميتى $\bar{X}'HX$ ، مصفوفة محددة موجبة أو مصفوفة شبة محددة موجبة ، حسبما يكون هذا الشكل محدداً موجباً أو شبه محدد موجب .

V. يكون الشكل الهرميتى محدداً موجباً إذا كان (وإذا كان فقط) توجد مصفوفة غير شاذة C بحيث يكون $H = \bar{C}'C$

VI. إذا كانت H محددة موجبة فإن كل مصغر رئيسى لـ H موجب والعكس صحيح .

VII. إذا كانت H شبه محددة موجبة فإن كل مصغر رئيسى لـ H يكون غير سالب والعكس صحيح .

مسائل محلولة

١. – اختزل $\bar{X}'\begin{bmatrix} 1 & 1+2i & 2-3i \\ 1-2i & 5 & -4-2i \\ 2+3i & -4+2i & 13 \end{bmatrix}X$ إلى شكل قانونى (18.4).

من المسألة ٧ من الفصل ١٥

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1+2i & 2-3i & 1 & 0 & 0 \\ 1-2i & 5 & -4-2i & 0 & 1 & 0 \\ 2+3i & -4+2i & 13 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{HC} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} & i/\sqrt{10} \\ 0 & 0 & -1 & (-4-4i)/\sqrt{10} & i/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{array}\right]$$

وهكذا فإن التحويل الخطى غير الشاذ :

$$X = BY = \begin{bmatrix} 1 & 2/\sqrt{10} & (-4+4i)/\sqrt{10} \\ 0 & 1/\sqrt{10} & -i/\sqrt{10} \\ 0 & -i/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{bmatrix} Y$$

يختزل الشكل الهرميتى المعطى إلى $\bar{y}_1 y_1 + \bar{y}_2 y_2 - \bar{y}_3 y_3$.

مسائل اضافية

٢ — اختزل كلا مايلي ، إلى الشكل القانونى :

(ا) $\bar{X}'\begin{bmatrix} 1 & 1+2i \\ 1-2i & 2 \end{bmatrix}X$ (جـ) $\bar{X}'\begin{bmatrix} 1 & 1-3i & 2-3i \\ 1+3i & 1 & 2+3i \\ 2+3i & 2-3i & 4 \end{bmatrix}X$

(ب) $\bar{X}'\begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}X$ (د) $\bar{X}'\begin{bmatrix} 1 & 1-i & 3-2i \\ 1+i & 0 & 2-i \\ 3+2i & 2+i & 4 \end{bmatrix}X$

إرشاد : فى (ب) اضرب أولا الصف الثانى من H فى i ثم أضف الناتج إلى الصف الأول .

الجـــواب :

(ا) $X = \begin{bmatrix} 1 & (-1-2i)/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}Y\ ;\ \bar{y}_1y_1 - \bar{y}_2y_2$

(ب) $X = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}Y\ ;\ \bar{y}_1y_1 - \bar{y}_2y_2$

(جـ) $X = \begin{bmatrix} 1 & (-1+3i)/3 & -1 \\ 0 & 1/3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}Y\ ;\ \bar{y}_1y_1 - \bar{y}_2y_2$

(د) $X = \begin{bmatrix} 1 & (-1+i)/\sqrt{2} & (-1+3i)/\sqrt{10} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & (-3-2i)/\sqrt{10} \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{10} \end{bmatrix}Y\ ;\ \bar{y}_1y_1 - \bar{y}_2y_2 - \bar{y}_3y_3$

٣ — أوجد التحويل الخطى $X=B\,Y$ الذى ، إذا اتبع بـ $Y=I\,X$ ، يحول (ا) من المسألة ٢ إلى (ب) من المسألة نفسهـــا .

الجـــواب : $X = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & (-1-2i)/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}Y$

٤ — بين أن $\bar{X}'\begin{bmatrix} 1 & 1+i & -1 \\ 1-i & 6 & -3+i \\ -1 & -3-i & 11 \end{bmatrix}X$ محدد موجب وأن $\bar{X}'\begin{bmatrix} 1 & 1+i & 1+2i \\ 1-i & 3 & 5 \\ 1-2i & 5 & 10 \end{bmatrix}X$ شبه محدد موجب .

٥ — برهن النظريات VI—VII

٦ — أوجد للأشكال الهرميتية ، نظريات مشابهة للنظريات XIX — XXI الواردة فى الفصل ١٧ والمتعلقة بالأشكال التربيعية .

٧ — برهن أن :

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \eta_{ij}\bar{x}_i x_j = \begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \bar{x}_1 & h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ \bar{x}_2 & h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{x}_n & h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{vmatrix}$$

حيث η_{ij} هو المعامل المرافق لـ h_{ij} فى $H=|h_{ij}|$.

إرشاد : استعمل (4.3) .

الفصل التاسع عشر

المعادلة المميزة لمصفوفة

المسألة :

ليكن $Y=AX$ ، حيث $A=[a_{ij}],\ (i,j=1,2,\ldots,n),$ تحويل خطى على F. على وجه العموم يحول هذا التحويل المتجه $X=[x_1,x_2,\ldots,x_n]'$ إلى المتجه $Y=[y_1,y_2,\ldots,y_n]'$ الذى يكون صلته بالمتجه X من خلال هذا التحويل .
سنحاول هنا ، النظر فى إمكان وجود بعض المتجهات X التى تتحول بهذا التحويل إلى λX . حيث λ إما أن يكون مقداراً عددياً من F أو من حقل ($\mathcal{F}$) يكون F حقلا جزئياً منه .

يسمى أى متجه X ، يتحول وفق هذا التحويل إلى λX أى أن ، أى متجه X يحقق العلاقة :

$$AX = \lambda X \tag{19.1}$$

متجها لا متغيراً بالنسبة لهـذا التحويل .

المعادلة المميزة : من (19.1) يكون لدينا

$$\lambda X - AX = (\lambda I - A)X = \begin{bmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \ldots\ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \ldots\ldots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \ldots\ldots & \lambda-a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0 \tag{19.2}$$

تكون لمجموعة المعادلات المتجانسة (19.2) حلول غير تافهة فيما إذا كانت (وإذا كان فقط) .

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \ldots\ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \ldots\ldots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \ldots\ldots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \tag{19.3}$$

إن مفكوك هذه المحددة يعطى كثير حدود $\varphi(\lambda)$ من الدرجة n بالنسبة لـ λ والذى يعرف باسم **كثير الحدود المميز** للتحويل المفروض أو المصفوفة A . تدعى المعادلة $\varphi(\lambda)=O$ **المعادلة المميزة** لـ A وتسمى جذورها $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ **الجذور المميزة** لـ A . إذا كان $\lambda=\lambda_i$ جذراً مميزاً فإنه يكون للمعادلة (19.2) حلول غير تافهة هى مركبات **المتجهات المميزة أو اللامتغيرة** المصاحبة المناظرة لهذه القيمة الخاصة (المميزة) . تدعى القيم الخاصة أيضاً ، **الجذور الكامنة** كما تدعى **المتجهات الخاصة** ، متجهات كامنة .

مثال ١ :

عين القيم الخاصة والمتجهات اللامتغيرة المرافقة للمصفوفة $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

إن المعادلة المميزة هي $\begin{bmatrix} \lambda-2 & -2 & -1 \\ -1 & \lambda-3 & -1 \\ -1 & -2 & \lambda-2 \end{bmatrix} = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = 0$ والقيم المميز : $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1.$

إذا كان $\lambda = \lambda_1 = 5,$ فإن (19.2) تأخذ الشكل :

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{أو} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

بما أن $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ مكافئ صفى للمصفوفة $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

فإن أحد الحلول يعطى بالعلاقة $x_1 = x_2 = x_3 = 1$; وهكذا فإنه يرافق القيمةالخاصة (الجذر المميز) $5 = \lambda$ ، فراغ اتجاهى ذو بعد واحد مولد بالمتجه $[1, 1, 1]'$ إن كل متجه $[k, k, k]'$ من هذا الفراغ هو متجه لا متغير لـ A .

عندما تكون $\lambda = \lambda_2 = 1$ فإن (19.2) يأخذ الشكل :

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{أو} \quad x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

إن $(2, -1, 0)$ و $(1, 0, -1)$ حلان مستقلان خطيا . وهكذا فإن الفراغ المصاحب للقيمة الخاصة $\lambda = 1$ هو الفراغ الاتجاهى الذى بعده هو 2 والمولد بالمتجهين $X_1 = [2, -1, 0]'$ و $X_2 = [1, 0, -1]'$ إن كل متجه $hX_1 + kX_2 = [2h+k, -h, -k]'$ هو متجه لا متغير لـ A.

أنظر المسألتين ١ — ٢

نظريات عامة :

سنبرهن فى المسألة ٣ حالة خاصة $(k = 3)$ من

I. إذا كانت $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ جذوراً خاصة مختلفة (متميزة) للمصفوفة A وإذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_k$ هى متجهات غير صفرية لا متغيرة مصاحبة على الترتيب لهذه الجذور فإن المتجهات X تكون مستقلة خطيا .

سنبرهن فى المسألة ٤ حالة خاصة $(n = 3)$ من

II. إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n وكانت $\phi(\lambda) = |\lambda I - A|$ فإن مشتقة $\phi(\lambda)$ من المرتبة k بالنسبة إلى λ يساوى $k!$ مرة مجموع المصغرات الرئيسية من الدرجة $(n-k)$ للمصفوفة المميزة إذا كانت $n > k$ ويساوى $n!$ مرة إذا كانت $k = n$ ويساوى الصفر إذا كان $k > n$.

كنتيجة للنظرية II نجد :

III. إذا كانت λ_i جذرا مميزا مكررا r من المرات للمعادلة المميزة للمصفوفة المربعة A ذات الدرجة n فإن رتبة المصفوفة $\lambda_i I - A$ لا تنقص عن $n-r$ وإن بعد الفراغ الاتجاهى اللامتغير المصاحب لا يزيد عن r .

أنظر المسألة ٥

بصورة خاصة :

III. إذا كان λ_i جذرا بسيطا للمعادلة المميزة لمصفوفة مربعة A من الدرجة n فإن رتبة $\lambda_i I - A$ تساوى $(n-1)$ وإن سعة الفراغ الاتجاهى اللامتغير المصاحب تساوى الواحد .

مثال ٢ :

إن المعادلة المميزة للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ الواردة فى المثال ١ هى $\phi(\lambda) = (\lambda-5)(\lambda-1)^2 = 0$

إن المتجه اللامتغير $[1, 1, 1]'$ المصاحب للقيمة الخاصة $\lambda = 5$ وإن المتجهين اللامتغيرين المستقلين خطيا $[2, -1, 0]'$ و $[1, 0, -1]'$ المصاحبين للجذر المضاعف $\lambda = 1$ تكون مجموعة مستقلة خطيا (أنظر النظرية I) .

إن بعد الفراغ الاتجاهى اللامتغير ، المصاحب للجذر البسيط المميز $\lambda = 5$ تساوى الواحد وإن بعد الفراغ الاتجاهى اللامتغير المصاحب للجذر المميز $\lambda = 1$ المضاعف من القوة 2 يساوى 2 (أنظر النظريتين III و 'III) .

أنظر أيضـــاً المسألة رقم ٦

بما أن مصغر رئيسى لـ A' يساوى المصغر الرئيسى المقابل من A فإننا نجد استنادا إلى العلاقة (19.4) من المسألة ١ :

IV. إن القيم الخاصة لـ A هى نفسها القيم الخاصة لـ A' .

بما أن أى مصغر رئيسى لـ $\bar{A}$ هو المرافق للمصغر الرئيسى المناظر من A فإنه يكون .

V. إن الجذور المميزة لكل من $\bar{A}$ و $\bar{A}'$ تكون المرافقة لجذور المميزة لـ A .

وإذا قارنا المعادلات المميزة فإننا نجـد .

VI. إذا كانت $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ القيم الخاصة لمصفوفة مربعة A من الدرجة n وإذا كانت k مقدارا عدديا فإن $k\lambda_1, k\lambda_2, \ldots, k\lambda_n$ تكون القيم الخاصة (الجذور المميزة) لـ kA .

VII. إذا كانت $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ القيم الخاصة لمصفوفة مربعة A من الدرجة n وإذا كان k مقدارا عدديا فإن $\lambda_1-k, \lambda_2-k, \ldots, \lambda_n-k$ تكون هى القيم الخاصة لـ $A - kI$.

سنبرهن فى المسألة ٧ :

VIII. إذا كانت α جذرا مميزا لمصفوفة غير شاذة A فإن $|A| / \alpha$ يكون جذرا خاصاً لـ $\operatorname{adj} A$.

مســـائل محلولة

١ – إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n فبرهن :

$$\phi(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^n + s_1\lambda^{n-1} + s_2\lambda^{n-2} + \ldots + s_{n-1}\lambda + (-1)^n|A| \quad (19.4)$$

حيث $(m = 1, 2, \ldots, n-1)$ يمثل $(-1)^m$ من المرات مجموع كل المصغرات الرئيسية ذات الدرجة m للمصفوفة A لنكتب من جديد $|\lambda I - A|$ بالشكل :

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & 0 - a_{12} & \ldots\ldots & 0 - a_{1n} \\ 0 - a_{21} & \lambda - a_{22} & \ldots\ldots & 0 - a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 - a_{n1} & 0 - a_{n2} & \ldots\ldots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

حيث يوضع كل عنصر فى هذه المحددة بشكل ثنائى الحد . لنفرض أننا عبرنا عن هذه المحددة بمجموع 2^n من المحددات وفقا للنظرية VIII من الفصل الثالث . يتكون قطر إحدى هذه المحددات من عناصر يساوى كل منها λ بينما تكون بقية عناصر المحددة أصفارا وتساوى قيمة هذه المحددة λ^n . وهناك محددة أخرى خالية من λ قيمتها هى $(-1)^n\,|A|$. أما بقية المحددات فإن كلا منها يحوى m عمودا حيث $(m = 1, 2, \ldots n-1)$ من $-A$ بينما يحوى كل عمود من الأعمدة الـ $n-m$ الباقية عنصرا وحيدا غير صفرى يساوى λ .

اعتبر واحدا من هذه المحددات ولنفرض أن أعمدته المرقة بالشكل $i_1, i_2, \ldots, i_m$ أعمدة من $-A$.

بعد عدد زوجى من المبادلات (عد ذلك) بين صفين متتالين متجاورين وعمودين متتاليين (متجاورين) تأخذ هذه المحددة الشكل .

$$(-1)^m \begin{vmatrix} a_{i_1,i_1} & a_{i_1,i_2} & \cdots & a_{i_1,i_m} & & & & \\ a_{i_2,i_1} & a_{i_2,i_2} & \cdots & a_{i_2,i_m} & & & 0 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & \\ a_{i_m,i_1} & a_{i_m,i_2} & \cdots & a_{i_m,i_m} & & & & \\ \hline & & & & \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda & \ldots & 0 \\ a_{i_n,i_1} & a_{i_n,i_2} & \cdots & a_{i_n,i_m} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{vmatrix} = (-1)^m \left|A^{i_1,i_2,\ldots,i_m}_{i_1,i_2,\ldots,i_m}\right| \lambda^{n-m}$$

حيث $\left|A^{i_1,i_2,\ldots,i_m}_{i_1,i_2,\ldots,i_m}\right|$ مصغر رئيسى من الدرجة m لـ A والآن

$$s_m = (-1)^m \sum_{\rho} \left|A^{i_1,i_2,\ldots,i_m}_{i_1,i_2,\ldots,i_m}\right|$$

حيث يضم التجميع $\rho = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\,2\ldots m}$ من التوافق المختلفة لـ $1, 2, \ldots, n$ أخذت m فى كل مرة .

٢ – استخدم العلاقة (19.4) فى المسألة ١ لفك $|\lambda I - A|$ إذا علمت أن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

نجد $s_1 = 1 + 0 - 2 + 6 = 5$

$$s_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 8 - 3 + 2 - 5 + 16 - 9 = 9$$

$$s_3 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -3 + 16 - 8 + 2 = 7$$

$$|A| = 2$$

أى $|\lambda I - A| = \lambda^4 - 5\lambda^3 + 9\lambda^2 - 7\lambda + 2.$

٣ – لتكن $\lambda_1, X_1;\ \lambda_2, X_2;\ \lambda_3, X_3$ قيما خاصة (جذور مميزة) مختلفة (متباينه) والمتجهات اللامتغيرة المصاحبة للمصفوفة A برهن أن X_1, X_2, X_3 مستقلة خطيا .

لنفرض أن العكس هو الصحيح أى لنفرض وجود مقادير عددية a_1 , a_2 , a_3 ليست كلها أصفارا وتحقق العلاقة :

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 = 0 \qquad (i)$$

لنضرب (i) بـ A علما بأن $A X_i = \lambda_i X_i$ فنجـد :

$$a_1 A X_1 + a_2 A X_2 + a_3 A X_3 = a_1 \lambda_1 X_1 + a_2 \lambda_2 X_2 + a_3 \lambda_3 X_3 = 0 \qquad (ii)$$

لنضرب (ii) فى A فنجـد .

$$a_1 \lambda_1^2 X_1 + a_2 \lambda_2^2 X_2 + a_3 \lambda_3^2 X_3 = 0 \qquad (iii)$$

والآن ممكن كتابة العلاقات (i) و (ii) ، (iii) كما يلى :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 X_1 \\ a_2 X_2 \\ a_3 X_3 \end{bmatrix} = 0 \qquad (iv)$$

من المسألة ٥ من الفصل ٣ ، $B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} \neq 0;$ أى أن B^{-1} موجودة . لنضرب (iv) فى B^{-1} فنجد $[a_1 X_1, a_2 X_2, a_3 X_3]' = 0.$ وهذا يتطلب أن يكون $a_1 = a_2 = a_3 = 0,$ وهو ما يتعارض مع الفرض أى أن X_1, X_2, X_3 تكون مستقلة خطيا .

٤ - من $\phi(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix}$ نجـد :

$$\phi'(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{13} \\ -a_{31} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix}$$

وهذا يساوى مجموع المصغرات الرئيسية للمصفوفة $\lambda I - A$ ذات الدرجة الثانية .

$$\phi''(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -a_{31} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{13} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\{(\lambda - a_{11}) + (\lambda - a_{22}) + (\lambda - a_{33})\}$$

وهذا يساوى $2!$ من المرات مجموع المصغرات الرئيسية للمصفوفة $\lambda I - A$ ذات الدرجة الواحدة

$$\phi'''(\lambda) = 3!$$

ونجـد أيضا : $\phi^{(iv)}(\lambda) = \phi^{(v)}(\lambda) = \ldots = 0.$

٥ - برهن أنه إذا كانت λ_i جذرا مميزا مكرر r من المرات للمصفوفة المربعة A ذات الدرجة n فإن رتبة $\lambda_i I - A$ لا تقل عن $n - r$ وأن بعد الفراغ الاتجاهى اللامتغير المصاحب لا يزيد عن r .

بما أن λ_i جذرا مكرر r من المرات للمعادلة $\phi(\lambda) = 0$ فإن $\phi(\lambda) = 0,\ \phi(\lambda_i) = \phi'(\lambda_i) = \phi''(\lambda_i) = \ldots = \phi^{(r-1)}(\lambda_i) = 0$ و $\phi^{(r)}(\lambda_i) \neq 0$. والآن $\phi^{(r)}(\lambda_i)$ يساوى $r!$ مرة مجموع المصغرات الرئيسية ذات الدرجة $(n-r)$ المصفوفة $\lambda_i I - A$ لذلك لا يمكن أن يتلاشى كل واحد من هذه المصغرات الرئيسية فينتج عن هذا أن رتبة $\lambda_i I - A$ لا يمكن أن تكون أقل من $(n-r)$ وينتج عن (11 . 2) أن الفراغ الاتجاهى اللامتغير المصاحب لـ $\lambda_i I - A$ أى فراغه الصفرى ، ذو رتبة لا تزيد عن r .

٦ – أوجد المصفوفة الواردة فى المسألة ٢ القيم الخاصة والفراغات الاتجاهية اللامتغيرة المصاحبة .

إن القيم الخاصة لهذه المصفوفة هى 1, 1, 1, 2

للقيمة $\lambda = 2$ نجد أن

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & -5 & 4 \\ 1 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 1 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تكون رتبتها ثلاثة ويكون بعد فراغها الصفرى الواحد ويتولد الفراغ الاتجاهى اللامتغير الخاص المصاحب بالمتجهه $[2, 3, -2, -3]'$

للقيمة $\lambda = 1$ نجد أن رتبة

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & -5 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & -4 & 1 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

هى الثالثة ويكون بعد فراغه الصفرى هو الواحد . أما الفراغ الاتجاهى اللامتغير المصاحب فإنه يتولد بالمتجه $[3, 6, -4, -5]'$

٧ – برهن أنه إذا كانت α قيمة خاصة لا تساوى الصفر لمصفوفة A مربعة غير شاذة ومن الدرجة n فإن $|A|/\alpha$ تكون قيمة خاصة لـ $\text{Adj}A$

من المسألة ١ يكون :

$$\alpha^n + s_1\alpha^{n-1} + \ldots + s_{n-1}\alpha + (-1)^n|A| = 0 \qquad (i)$$

حيث $s_i,\ (i = 1, 2, \ldots, n-1)$ يساوى $(-1)^i$ من المرات مجموع كل المصغرات الرئيسية ذات الدرجة i لـ A ويكون

$$|\mu I - \text{adj}\, A| = \mu^n + S_1\mu^{n-1} + \ldots + S_{n-1}\mu + (-1)^n|\text{adj}\, A|$$

حيث $S_j,\ (j = 1, 2, \ldots, n-1)$ يساوى $(-1)^j$ من المرات مجموع المصغرات الرئيسية ذات الدرجة j لـ $\text{adj}A$

استنادا إلى (6.4) وتعريف كل من s_i و S_j يكون $S_1 = (-1)^n s_{n-1},\ S_2 = (-1)^n|A|s_{n-2},\ \ldots,\ S_{n-1} = (-1)^n|A|^{n-2}s_1,$ و $|\text{adj}A| = |A|^{n-1}$ أى :

$$|\mu I - \text{adj}\, A| = (-1)^n\{(-1)^n\mu^n + s_{n-1}\mu^{n-1} + s_{n-2}|A|\mu^{n-2} + \ldots + s_2|A|^{n-3}\mu^2 + s_1|A|^{n-2}\mu + |A|^{n-1}\}$$

و

$$|A|^{1-n}|\mu I - \text{adj}\, A| = (-1)^n\{1 + s_1(\frac{\mu}{|A|}) + \ldots + s_{n-1}(\frac{\mu}{|A|})^{n-1} + (-1)^n(\frac{\mu}{|A|})^n|A|\} = f(\mu)$$

والآن :

$$f(\frac{|A|}{\alpha}) = (-1)^n\{1 + s_1(\frac{1}{\alpha}) + \ldots + s_{n-1}(\frac{1}{\alpha})^{n-1} + (-1)^n(\frac{1}{\alpha})^n|A|\}$$

ومن (i) نجد :

$$\alpha^n f(\frac{|A|}{\alpha}) = (-1)^n\{\alpha^n + s_1\alpha^{n-1} + \ldots + s_{n-1}\alpha + (-1)^n|A|\} = 0$$

أى أن α / $|A|$ قيمة خاصة لـ $adj\ A$

٨ – برهن أن المعادلة المميزة لمصفوفة متعامدة P هى معادلة عكسية

إن لدينا :

$$\phi(\lambda) = |\lambda I - P| = |\lambda PIP' - P| = |-P\lambda(\frac{1}{\lambda}I - P')| = \pm\lambda^n|\frac{1}{\lambda}I - P| = \pm\lambda^n\phi(\frac{1}{\lambda})$$

مســائل محلولة

٩ – أوجد للمصفوفات التالية القيم الخاصة (الجذور المميزة) لكل فراغ وأساس اتجاهى لا متغير مصاحب

(ا) $\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\2&2&3\end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix}1&2&2\\0&2&1\\-1&2&2\end{bmatrix}$ (هـ) $\begin{bmatrix}-2&-8&-12\\1&4&4\\0&0&1\end{bmatrix}$ (ز) $\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ (ط) $\begin{bmatrix}1&-1&-1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix}1&1&-2\\-1&2&1\\0&1&-1\end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&-3&3\end{bmatrix}$ (و) $\begin{bmatrix}-3&-9&-12\\1&3&4\\0&0&1\end{bmatrix}$ (ح) $\begin{bmatrix}2&2&0\\2&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ (ى) $\begin{bmatrix}2-i&0&i\\0&1+i&0\\i&0&2-i\end{bmatrix}$.

(ك) $\begin{bmatrix}3&2&2&-4\\2&3&2&-1\\1&1&2&-1\\2&2&2&-1\end{bmatrix}$ (ل) $\begin{bmatrix}5&6&-10&7\\-5&-4&9&-6\\-3&-2&6&-4\\-3&-3&7&-5\end{bmatrix}$ (م) $\begin{bmatrix}-1&-1&-6&3\\1&-2&-3&0\\-1&1&0&1\\-1&-1&-5&3\end{bmatrix}$

الجــواب :

(ا) $1, [1,1,1]'$ $2, [2,1,0]'$; $3, [1,-1,-2]'$

(ب) $-1, [1,0,1]'$; $2, [1,3,1]'$; $1, [3,2,1]'$

(جـ) $1, [1,1,-1]'$; $2, [2,-1,-2]'$;

(د) $1, [1,-1,0]'$;

(هـ). $2, [2,-1,0]'$; $0, [4,-1,0]'$; $1, [4,0,-1]'$

(و) $0, [3,-1,0]'$; $1, [12,-4,-1]'$

(ز) $1, [1,0,-1]', [0,1,-1]'$; $3, [1,1,0]'$

(ح) $0, [1,-1,0]'$; $1, [0,0,1]'$; $4, [1,1,0]'$

(ط) $-1, [0,1,-1]'$; $i, [1+i,1,1]'$; $-i, [1-i,1,1]'$

(ى) $2, [1,0,1]'$; $1+i, [0,1,0]'$; $2-2i, [1,0,-1]'$

(ك) $1, [1,0,-1,0]', [1,-1,0,0]'$; $2, [-2,4,1,2]'$; $3, [0,3,1,2]'$

(ل) $1, [1,2,3,2]'$; $-1, [-3,0,1,4]'$

(م) $0, [2,1,0,1]'$; $1, [3,0,1,4]'$; $-1, [3,0,1,2]'$

١٠ – برهن أنه إذا كان X متجه وحدة وإذا كان $AX=\lambda X$ فإن $X'AX = \lambda$

١١ – برهن أن القيم الخاصة (الجذور المميزة). لمصفوفة قطرية هى عناصر قطرها وأن المتجهات اللامتغيرة المصاحبة لهذه المصفوفة هى المتجهات الأولية E_i ,

١٢ – برهن النظريتين I و VI .

١٣ – برهن النظرية VI .

إرشاد : إذا كان $|\lambda I - A| = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_n)$ فإن $|(\lambda+k)I - A| = (\lambda+k-\lambda_1)(\lambda+k-\lambda_2)\ldots(\lambda+k-\lambda_n)$.

١٤ – برهن أن القيم الخاصة للمجموع المباشر $A_1, A_2, \ldots, A_s$ هى القيم الخاصة للمصفوفات $A_1, A_2, \ldots A_s$.

١٥ – برهن أنه إذا كانت A و $N = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ مصفوفتين مربعتين من الدرجة n وكانت $n>r$ فإنه يكون لكل من NA و AN المعادلة المميزة ذاتها .

١٦ – برهن أنه إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n والرتبة r فإنه يكون هناك على الأقل $n-r$ من جذورها المميزة أصفارا .

١٧ – برهن أنه إذا كانت A و B مصفوفتين مربعتين من الدرجة n وكانت A غير شاذة . فإن لـ $A^{-1}B$ و BA^{-1} القيم الخاصة ذاتها .

١٨ – بين أنه يكون للمصفوفتين B و $A^{-1}BA$ نفس الجذور المميزة حيث المصفوفتين A و B هما المصفوفتان الواردتين فى المسألة ١٧ .

١٩ – لتكن A مصفوفة مربعة من الدرجة n اكتب $|\lambda I - A^{-1}| = |-\lambda A^{-1}(\frac{1}{\lambda}I - A)|$ ثم استنتج أن $1/\lambda_1, 1/\lambda_2, \ldots, 1/\lambda_n$ هى القيم الخاصة لـ A^{-1}

٢٠ – برهن أن القيم الخاصة لمصفوفة متعامدة P ذات قيمة مطلقة مشتركة مساوية الواحد .

إرشاد : إذا كان λ_i و X_i قيمة خاصة (جذور مميزة) لـ P المتجه اللامتغير المصاحب لها فإن $X_i' X_i = (PX_i)'(PX_i) = \lambda_i \lambda_i X_i' X_i$.

٢١ – برهن أنه إذا كان $\lambda_i = \pm 1$ قيمة خاصة لمصفوفة متعامدة P وكان X_i المتجهه اللامتغير المصاحب لها فإن $X_i' X_i = 0$

٢٢ – برهن أن القيم الخاصة لمصفوفة واحدية ذات قيمة مطلقة مشتركة تساوى الواحد .

٢٣ – استفد من النظرية II واستنتج أن :

$$\phi(0) = (-)^n |A|$$

$\phi'(0)$ يساوى $(-1)^{n-1}$ من المرات مجموع المصغرات الرئيسية ذات الدرجة $n-1$ لـ A

....

$\phi^{(r)}(0)$ يساوى $(-1)^{n-r} r!$ من المرات مجموع المصغرات الرئيسية ذات الدرجة $(n-r)$ لـ A

....

$$\phi^{(n)}(0) = n!$$

٢٤ – عوض من المسألة ٢٣ فى :

$$\phi(\lambda) = \phi(0) + \phi'(0)\cdot\lambda + \frac{1}{2!}\phi''(0)\cdot\lambda^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\phi^{(n)}(0)\cdot\lambda^n$$

للحصول على (19.4) .

الفصل العشرون

التشـــابه

المصفوفتان المتشابهتان :

نقول عن مصفوفتين مربعتين A و B من الدرجة n إنهما متشابهتان على F فيما إذا وجدت مصفوفةغير شاذة R على F بحيث يكون :

$$B = R^{-1}AR \qquad (20.1)$$

مثال ١ :

إن المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ الواردة في المثال ١ من الفصل ١٩ والمصفوفة

$$B = R^{-1}AR = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 14 & 13 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

متشابهان .

إن المعادلة المميزة $(\lambda-5)(\lambda-1)^2 = 0$ للمصفوفة B هي أيضا المعادلة المميزة للمصفوفة A .

إن المتجه اللامتغير لـ B المصاحب للقيمة $\lambda = 5$ هو $Y_1 = [1, 0, 0]'$ ومن السهل أن نرى أن $X_1 = RY_1 = [1, 1, 1]'$ متجها لا متغيراً لـ A مرافق (مصاحب) للقيمة الخاصة ذاتها $\lambda = 5$. ويمكن للقارىء أن يبرهن على أن $Y_2 = [7, -2, 0]'$ و $Y_3 = [17, -3, -2]'$ زوج من المتجهات اللامتغيرة لـ B والمستقلة خطيا والمرافقة لـ $\lambda = 1$ بينما $X_2 = RY_2$ و $X_3 = RY_3$ زوج من المتجهات اللامتغيرة لـ A والمستقلة خطيا والمرافقة لنفس الجذر $\lambda = 1$

إن المثال ١ : يوضح النظريتين التاليتين .

I. يكون لمصفوفتين متشابهتين نفس الجذور المميزة .

البرهان أنظر المسألة ١

II. إذا كان Y متجها لا متغير للمصفوفة $B = R^{-1} A R$ المناظر للجذر المميز λ_i لـ B فإن $X = RY$ يكون متجها لا متغيرا للمصفوفة A المناظرة لنفس الجذر المميز λ_i للمصفوفة A

من أجل البرهان أنظر المسألة ٢

المصفوفات القطرية :

إن الجذور المميزة لمصفوفة قطرية $D = \text{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ هي العناصر القطرية لهذه المصفوفة .

يكون دائماً لمصفوفة قطرية n من المتجهات اللامتغيرة المستقلة خطيا . إن المتجهات الأولية E_i تكون مثل هذه

المجموعة لأن $DE_i = a_i E_i$ ، حيث $(i = 1, 2, ...n)$.

كنتيجة لما تقدم نجد (أنظر المسألتين ٣ و ٤ للبرهان) .

III. إن لأي مصفوفة مربعة A من الدرجة n المشابهة لمصفوفة قطرية n متجها لا متغيرا مستقلة خطيا .

IV. إذا كانت A مصفوفة مربعة من درجة n ولها n متجها لا متغيرا مستقلة خطيا فإنها تكون مشابهة لمصفوفة قطرية .

أنظر المسألة ٥

سنبرهن في المسألة ٦ :

V. على حقل F تكون مصفوفة A مربعة ومن الدرجة n مشابهة لمصفوفة قطرية فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) المصفوفة $\lambda I - A$ قابلة للتحليل كليا على F وإذا كان تعدد كل λ_i مساوية لبعد الفراغ المعدوم للمصفوفة $\lambda_i I - A$

ليس من الضروري أن تكون كل مصفوفة مربعة من الدرجة n مشابهة لمصفوفة قطرية . إن المصفوفة الواردة في المسألة ٦ من الفصل ١٩ مثال على ذلك . حيث يناظر الجذر الثلاثي $\lambda = 1$ الفراغ المعدوم للمصفوفة $\lambda I - A$ والذي بعده يساوي الواحد . يمكننا من جهة أخرى أن نبرهن :

VI. يشابه كل مصفوفة مربعة A من الدرجة n مصفوفة مثلثية عناصر قطرها هي الجذور المميزة للمصفوفة A .

أنظر المسألتين ٧ — ٨

ونجد كحالة خاصه :

VII. إذا كانت A مصفوفة حقيقية مربعة ومن الدرجة n ذات جذور مميزة حقيقية ، فإنه يوجد مصفوفة متعامدة P بحيث تكون $P^{-1}AP = P'AP$ مصفوفة مثلثية عناصرها القطرية هي الجذور المميزة للمصفوفة A .

أنظر المسألتين ٩ — ١٠

VIII. إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n عناصرها مركبة أو مصفوفة مربعة حقيقية من الدرجة n جذورها المميزة مركبة ، فإنه توجد مصفوفة واحدية U بحيث تكون $U^{-1}AU = \bar{U}'AU$ مصفوفة مثلثية عناصر قطرها الجذور المميزة للمصفوفة A .

أنظر المسألة ١١

نقول عن المصفوفتين A و $P^{-1}AP$ الواردتين في النظرية VII إنهما **متشابهتان تعامديا** .

ونقول عن المصفوفتين A و $U^{-1}AU$ الواردتين في النظرية VIII إنهما **متشابهتان واحديا**

المصفوفة القابلة لأن تكون قطرية :

نقول عن مصفوفة A مشابهة لمصفوفة قطرية إنها **قابلة لأن تكون قطرية** . إن النظرية IV هي أساس لدراسة بعض أنواع ، ترد في الفصل القادم من المصفوفات القابلة لأن تكون قطرية .

مسائل محلولة

١ — برهن أنه يكون لمصفوفتين متشابهتين نفس الجذور المميزة .

لنفرض أن A و $B = R^{-1}AR$ مصفوفتان متشابهتان فإن

(i)
$$\lambda I - B = \lambda I - R^{-1}AR = R^{-1}\lambda IR - R^{-1}AR = R^{-1}(\lambda I - A)R$$

و

$$|\lambda I - B| = |R^{-1}| \cdot |\lambda I - A| \cdot |R| = |\lambda I - A|$$

وهكذا فإنه يكون لكل من A و B المعادلة المميزة نفسها ونفس الجذور المميزة .

٢ – برهن أنه إذا كانت Y متجها لا متغيرا لـ $B = R^{-1}AR$ المناظر للجذر المميز λ_i – فإن $X = RY$ يكون متجها لا متغيرا لـ A المناظر لنفس الجذر المميز λ_i لـ A

ينتج من الفرض أن $BY = \lambda_i Y$ و $RB = AR$ أى :

$$AX = ARY = RBY = R\lambda_i Y = \lambda_i RY = \lambda_i X$$

ويكون X متجهاً لا متغيراً للمصفوفة A يناظر الجذر المميز λ_i

٣ – برهن أن يكون لأى مصفوفة مربعة A من الدرجة n مشابهة لمصفوفة قطرية ، n متجها لا متغيرا مستقلة خطيا .

لنفرض $R^{-1}AR = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n) = B$ أن المتجهات الأولية $E_1, E_2, \dots, E_n$ هى متجهات لا متغيرة لـ B .
ونجـد استنادا إلى النظرية II أن $X_j = RE_j$ هى متجهات لا متغيرة لـ A وبما أن R غير شاذة فإن أعمدتها تكون متجهات مستقلة خطيا .

٤ – برهن أنه إذا كان لمصفوفة مربعة A من الدرجة n ، n متجها لا متغيرا مستقلة خطيا ، فإنها تكون مشابهة لمصفوفة قطرية .

لنفرض أن الـ n متجها لا متغيرا $X_1, X_2, \dots, X_n$ ، المستقلة خطيا ، تصاحبها على الترتيب الجذور المميزة $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ بحيث يكون $AX_i = \lambda_i X_i$, $(i = 1, 2, \dots, n)$. ولنفرض $R = [X_1, X_2, \dots, X_n]$; فيكون :

$$AR = [AX_1, AX_2, \dots, AX_n] = [\lambda_1 X_1, \lambda_2 X_2, \dots, \lambda_n X_n]$$

$$= [X_1, X_2, \dots, X_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{bmatrix} = R\,\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

ومنـه : $R^{-1}AR = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

٥ – إن مجموعة المتجهات اللامتغيرة المستقلة خطيا للمصفوفة A الواردة فى المثال ١ من الفصل ١٩ هى :

$$X_1 = [1, 1, 1]', \quad X_2 = [2, -1, 0]', \quad X_3 = [1, 0, -1]'$$

لنأخذ $R = [X_1, X_2, X_3] = \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$ فيكون $R^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 2 & -3\end{bmatrix}$ وتكون :

$$R^{-1}AR = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

مصفوفة قطرية .

٦ – برهن أنه تكون ، على حقل F ، مصفوفة A مربعة ومن الدرجة n ، مشابهة لمصفوفة قطرية فيما إذا كان (وإذا كان فقط) من الممكن تحليل $\lambda I - A$ كليا فى F وإن تعدد كل λ_i تكون مساوية لبعد الفراغ المعدوم للمصفوفة $\lambda_i I - A$

لنفرض أولا أن $R^{-1}AR = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = B$ وأن k على الضبط من هذه الجذور المميزة مساوية λ_i فيكون للمصفوفة $\lambda_i I - B$ على الضبط ، k صفرا واقعا على قطرها وتكون إذن رتبتها مساوية $n - k$ وتكون بعد فراغها المعدوم

مساويا $k = (n - k) - n$ ولكن $\lambda_i I - A = R(\lambda_i I - B)R^{-1}$; إذن $\lambda_i I - A$ يكون له نفس الرتبة $n - k$ والانعدامية (صفرية) k التي تكون للمصفوفة $\lambda_i I - B$.

على العكس ، لنفرض أن $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ هي الجذور المميزة المتباينة لـ A وأن هذه الجذور ، على الترتيب ، تعددات $r_1, r_2, \ldots, r_s$ حيث $r_1 + r_2 + \ldots + r_s = n$. لنرمز ب $V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_s}$ للفراغات الاتجاهية اللامتغيرة المرافقة . ولنأخذ $X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{ir_i}$ كأساس للفراغ الاتجاهي اللامتغير $V_{r_i}, (i = 1, 2, \ldots, s)$. لنفرض أنه يوجد مقادير عددية a_{ij} ليست كلها أصفارا بحيث يكون :

$$a_{11}X_{11} + a_{12}X_{12} + \ldots + a_{1r_1}X_{1r_1}) + (a_{21}X_{21} + a_{22}X_{22} + \ldots + a_{2r_2}X_{2r_2})$$
$$+ \ldots + (a_{s1}X_{s1} + a_{s2}X_{s2} + \ldots + a_{sr_s}X_{sr_s}) = 0$$

والآن كل متجه $Y_i = a_{i1}X_{i1} + a_{i2}X_{i2} + \ldots + a_{ir_i}X_{ir_i}) = 0, (i = 1, 2, \ldots, s)$. وإلا فإنه يكون متجها لا متغيرا وتكون في مجموعها استنادا إلى النظرية I مستقلة خطيا . ولكن هذا يخالف (i) وعلى ذلك فإن المتجهات X تكون أساساً لـ V_n وأن A تكون مشابهة لمصفوفة قطرية استنادا إلى النظرية IV .

٧ – برهن أن كل مصفوفة مربعة A من الدرجة n تشابه مصفوفة مثلثية تكون قطرها من الجذور المميزة لـ A .

لتكن $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ القيم الخاصة لـ A ولنفرض أن X_1 هو متجهه لا متغير لـ A مناظر للقيمة الخاصة λ_1 ولنأخذ X_1 كأول عمود من مصفوفة غير شاذة Q_1 أعمدتها الأخرى اختيارية شرط أن يكون $|Q_1| \neq 0$. إن العمود الأول من AQ_1 هو $AX_1 = \lambda_1 X_1$ وإن العمود الأول من $Q_1^{-1}AQ_1$ هو $Q_1^{-1}\lambda_1 X_1$. ولكن هذا ، كعمود أول من $Q_1^{-1}\lambda_1 Q_1$. يكون $[\lambda_1, 0, \ldots, 0]'$. وعلى ذلك

$$Q_1^{-1}AQ_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & B_1 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \qquad \text{(i)}$$

حيث A_1 من الدرجة $(n-1)$

بما أن $|\lambda I - Q_1^{-1}AQ_1| = (\lambda - \lambda_1)|\lambda I - A_1|$ وبما أن $Q_1^{-1}AQ_1$ و A لهما القيم الخاصة ذاتها فإنه ينتج عن ذلك أن القيم الخاصة لـ A_1 هي $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$. إذا كانت $n = 2$ فإن $A_1 = [\lambda_2]$ وتكون النظرية قد برهنت مع $Q = Q_1$

وإلا ، فلنفرض أن X_2 هو متجه لا متغير لـ A_1 مناظر للقيمة الخاصة (الجذر المميز) λ_2 ولنأخذ X_2 كعمود أول من مصفوفة غير شاذة Q_2 وتؤخذ بقية أعمدتها اختيارية ضمن الشرط $|Q_2| \neq 0$ فيكــون :

$$Q_2^{-1}A_1Q_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \qquad \text{(ii)}$$

حيث A_2 من الدرجة $n - 2$ إذا كان $n = 3$ فإن $A_2 = [\lambda_3]$ تكون النظرية قد برهنت $Q = Q_1 \cdot \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}$

وإلا فإننا نكرر الطريقة السابقة وبعــد $(n - 1)$ خطوة على الأكثر نجــد :

$$Q = Q_1 \cdot \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & Q_3 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & Q_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \text{(iii)}$$

بحيث تكون $Q^{-1}AQ$ مثلثية عناصر قطرها القيم الخاصة لـ A .

٨ – أوجد مصفوفة غير شاذة Q بحيث تكون المصفوفة $Q^{-1}AQ$ مثلثية علما أن :

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -1 & 8 & -9 \\ 6 & -1 & 5 & -5 \\ -5 & 1 & -4 & 5 \\ 4 & 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

نجد هنا $|\lambda I - A| = (\lambda^2-1)(\lambda^2-4)$ وأن القيم الخاصة هى $1, -1, 2, -2$ لنأخذ $[5, 5, -1, 3]'$ متجها لا متغيرا مناظرا للقيمة الخاصة 1 ، كعمود أول فى المصفوفة غير الشاذة Q_1 ولنأخذ بقية أعمدتها متجهات أولية ولتكن .

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

فيكــون :

$$Q_1^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad Q_1^{-1}AQ_1 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & -1 & 8 & -9 \\ 0 & 0 & -15 & 20 \\ 0 & 4 & -12 & 16 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & B_1 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$$

إن جذراً مميزاً للمصفوفة A_1 هو -1 والمتجه اللامتغير المصاحب لها هو $[4, 0, -1]'$. لنأخذ ; $Q_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ فنجد

$$Q_2^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad Q_2^{-1}A_1Q_2 = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} -20 & -15 & 20 \\ 0 & -48 & 64 \\ 0 & -11 & 48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

إن جذراً مميزاً للمصفوفة A_2 هو 2 و $[8, 11]'$ متجه لا متغير مصاحب لهذه القيمة . لنأخذ ; $Q_3 = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}$ فنجد :

$$Q_3^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -11 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad Q_3^{-1}A_2Q_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2/5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

ينتج مما سبق أن :

$$Q = Q_1 \cdot \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 8 & 0 \\ 3 & -1 & 11 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q^{-1} = \frac{1}{160}\begin{bmatrix} 32 & 0 & 0 & 0 \\ -40 & 40 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 20 & 0 \\ -180 & 40 & -220 & 160 \end{bmatrix}$$

و

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -7 & -9/5 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

٩ – إذا كانت A هى أى مصفوفة حقيقية مربعة من الدرجة n وذات قيمة خاصة حقيقية ، فإنه توجد مصفوفة متعامدة P بحيث تكون $P^{-1}AP$ مصفوفة مثلثية عناصر قطرها القيم الخاصة لـ A .

لتكن $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ القيم الخاصة لـ A . بما أن هذه القيم حقيقية فإن المتجهات اللامتغيرة المرافقة لها تكون حقيقية أيضا . كما فى المسألة ٧ ، لنأخذ Q_1 مكونة من متجه لا متغير مناظر لـ λ_1 كعموداً ول ولنستعمل طريقة

جرام – شميت لنحصل من Q_1 على مصفوفة متعامدة P_1 يتناسب عمودها الأول مع العمود الأول من Q_1 . أى :

$$P_1^{-1}AP_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & B_1 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$$

حيث A_1 من الدرجة $(n-1)$ ويكون $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ كجذور مميزة له .

ننطلق بعدما تقدم من Q_2 المصفوفة التى يتكون عمودها الأول من متجه لا متغير لـ A_1 يناظر القيمة الخاصة λ_2 ونستعمل مرة أخرى طريقة جرام – شميت لكى نحصل على المصفوفة المتعامدة P_2 أى :

$$P_2^{-1}A_1P_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}.$$

وبعد عدد كاف من هذه العمليات سنحصل على المصفوفة المتعامدة :

$$P = P_1 \cdot \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & P_{n-1} \end{bmatrix}.$$

والتى يكون لها $P^{-1}AP$ مصفوفة مثلثية عناصر قطرها القيم الخاصة لـ A .

١٠ – أوجد مصفوفة متعامدة P بحيث تكون المصفوفة

$$P^{-1}AP = P^{-1}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}P$$

مثلثية عناصر قطرها القيم الخاصة لـ A .

من المثال ١ من الفصل ١٩ نجد أن القيم الخاصة هى $5,1,1$, وأن $[1,0,-1]'$ هو متجهه لا متغير مناظر للقيمة الخاصة $\lambda = 1$

لنأخذ $Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ وباستخدام طريقة جرام – شميت نحصل على :

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

كمصفوفة متعامدة يتناسب عمودها الأول مع المتجه $[1,0,-1]'$

ونجـد بعدما تقدم :

$$P_1^{-1}AP_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & B_1 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix},$$

أن لـ A_1 القيمة الخاصة $\lambda = 1$ $[1, -\sqrt{2}]$ كتجه لا متغير مصاحب لهذه القيمة .

نستنتج من $Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$ بتطبيق قاعدة جرام – شميت ، المصفوفة المتعامدة $P_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$ وتكون المصفوفة .

$$P = P_1 \cdot \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

متعامدة و
$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

١١ – أوجد مصفوفة واحدية U بحيث تكون $U^{-1}AU$ مصفوفة مثلثية عناصر قطرها القيم الخاصة لـ A ، علما بأن :

$$A = \begin{bmatrix} 5+5i & -1+i & -6-4i \\ -4-6i & 2-2i & 6+4i \\ 2+3i & -1+i & -3-2i \end{bmatrix}$$

إن المعادلة المميزة لـ A هى $\lambda(\lambda^2 + (-4-i)\lambda + 5 - i) = 0$ وإن $0,\ 1-i,\ 3+2i$. هى جذور هذه المعادلة المميزة ،

لنأخذ القيمة $\lambda = 0$ المتجه $[1,-1,1]'$ كتجه لا متغير مصاحب لهذه القيمة ولنكون
$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

إن طريقة جرام – شميت تعطى المصفوفة الواحدية :

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & [illegible]/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

وتكون المصفوفة :
$$U_1^{-1}AU_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2\sqrt{2}(1-i) & -(26+24i)/\sqrt{6} \\ 0 & 1-i & (2+3i)/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 3+2i \end{bmatrix}$$

ولذلك ، ولهذا الاختيار للمصفوفة Q_1 تكون المصفوفة المطلوبة هى $U = U_1$

١٢ – أوجـد مصفوفة متعامدة P بحيث تكون المصفوفة $P^{-1}AP$ مثلثية عناصر قطرها القيم الخاصة لـ A علما بأن :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

إن 2,3,6 هى القيم الخاصة لـ A وإنه من الممكن أن نأخذ $[1,-2,1]'$ ، $[1,1,1]'$ ، $[1,0,-1]'$ كتجهات لا متغيرة مصاحبة للقيم المذكورة . والآن ، إن هذه المتجهات الثلاثة مستقلة ومتعامدة مثنى فيما بينها . إذا أخذنا :

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

فإننا نجد $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(2,3,6)$. إن هذا يتطلب منا دراسة أكثر كالا للمصفوفات الحقيقية المتماثلة وستتم هذه الدراسة فى الفصل القادم .

مسائل اضافية

١٣ – أوجد مصفوفة متعامدة P بحيث تكون المصفوفة $P^{-1}AP$ مثلثية عناصر قطرها القيم الخاصة لـ A وذلك لكل مصفوفة A وردت فى المسألة ٩ (أ) و(ب) ، (جـ) ، (د) من الفصل ١٩ .

الجـــواب (أ) $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} & 2/3 \\ -1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} & 2/3 \\ 0 & -4/3\sqrt{2} & 1/3 \end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$

١٤ – فسر لماذا تشابه المصفوفتان (أ) و(ب) من المسألة ١٣ مصفوفة قطرية بينما لا تحقق ذلك المصفوفتان (جـ) و (د) . ادرس المصفوفتان (أ) – (م) المسألة (٩) الفصل ١٩ وعين تلك التى تكون مشابهة لمصفوفة قطرية عناصر قطرها القيم الخاصة للمصفوفة المفروضة .

١٥ – أوجد لكل مصفوفة A واردة فى المسألة ٩ (ط) و (ى) من الفصل ١٩ ، مصفوفة واحدية U بحيث تكون $U^{-1}AU$ مصفوفة المثلثية عناصر قطرها القيم الخاصة لـ A .

الجـــواب : ١ (ط) $\begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -(1+i)/2 \\ 1/\sqrt{2} & (1-i)/2\sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ -1/\sqrt{2} & (1-i)/2\sqrt{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (ى) $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

١٦ – برهن أنه إذا كانت A مصفوفة متماثلة وكانت P متعامدة ، فإن $B = P^{-1}AP,$ تكون مصفوفة حقيقية متماثلة .

١٧ – ادخل التعديلات الضرورية على المسألة ٩ لكى تبرهن النظرية VIII .

١٨ – لنفرض أن B_i و C_i مصفوفتان متشابهتان للقيم $(i = 1,2,...m)$ بين أن المصفوفتين :

$B = \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_m)$ و $C = \text{diag}(C_1, C_2, \dots, C_m)$

متشابهتان . إرشاد : افرض $C_i = R_i^{-1} B_i R_i$ وكون $R = \text{diag}(R_1, R_2, \dots, R_m)$.

١٩ – ليكن $B = \text{diag}(B_1, B_2)$ و $C = \text{diag}(B_2, B_1)$. اكتب $I = \text{diag}(I_1, I_2)$، حيث درجة كل من I_1, I_2 وعلى التوالى من درجتى B_1 و B_2 ثم افرض . $R = \begin{bmatrix} 0 & I_1 \\ I_2 & 0 \end{bmatrix}$ بين أن $R^{-1}BR = C$ واستنتج أن B و C متشابهتان .

٢٠ – مدد نتائج المسألة ١٩ على الحالة التى يكون فيها $B = \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_m)$ و C أى مصفوفة نحصل عليها بتغيير مواقع B_i على طول قطر هذه المصفوفة .

٢١ – إذا كانت A و B مصفوفتين مربعتين من الدرجة n فإن المصفوفتين AB و BA نفس الجذور المميزة .

إرشاد : نفرض $PAQ = N$; فيكون $PABP^{-1} = NQ^{-1}BP^{-1}$ و $Q^{-1}BAQ = Q^{-1}BP^{-1}N$. أنظر المسألة ١٥ من الفصل ١٩ .

٢٢ – إذا كانت $A_1, A_2, \dots, A_s$ مصفوفات غـــير شاذة ومن درجـــة واحـــدة فـــبرهن أن المصفوفات $A_1A_2\dots A_s,\ A_2A_3\dots A_sA_1,\ A_3\dots A_sA_1A_2,$ المعادلة المميزة ذاتها .

٢٣ – لنفرض $Q^{-1}AQ=B$ حيث B مصفوفة مثلثية عناصر قطرها $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ القيم الخاصة لـ A .

(ا) بين أن $Q^{-1} A^k Q$ مصفوفة مثلثية عناصر قطرها هى القيم الخاصة لـ A مرفوعة للأس k

(ب) برهن أن $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k = \text{trace } A^k$.

٢٤ – برهن أن علاقة تشابه المصفوفات هى علاقة تكافؤ .

٢٥ – برهن أن : لـ $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ نفس القيم الخاصة ولكنهما غير متشابهتين .

الفصل الحادى والعشرون

المصفوفات المتشابهة لمصفوفة قطرية

المصفوفات المتماثلة الحقيقية :

يمكن دراسة المصفوفات المتماثلة الحقيقية والمصفوفات الهرمتية سويا ، ولكننا نفضل هنا دراستها بشكل منفصل المصفوفات المتماثلة الحقيقية ، نجـد :

I — أن الجذور المميزة لمصفوفة متماثلة حقيقية ، كلها حقيقية .

أنظر المسألة ١

II — المتجهات اللامتغيرة المصاحبة للقيم الخاصة المختلفة لمصفوفة متماثلة حقيقية تكون متعامدة مثنى .

أنظر المسألة ٢

إذا كانت A حقيقية ومتماثلة ، فإن كل B_i الواردة فى المسألة ٩ من الفصل ٢٠ تساوى الصفر . وعلى ذلك :

III إذا كانت A مصفوفة حقيقية مربعة من الدرجة n متماثلة ، قيمها الخاصة هى $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$، فإنه توجد مصفوفة حقيقية متعامدة P بحيث يكون $P'AP = P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

إن النظرية III تستلزم .

IV إذا كانت λ_i قيمة خاصة ذات تعددية r_i لمصفوفة حقيقية متماثلة فإنه يوجد فراغ لا متغيرا مصاحب لـ λ_i من البعـد r_i

وباستعمال مصطلحات الأشكال التربيعية الحقيقية تأخذ النظرية III الشكل التالى :

V. يمكن اختزال كل شكل تربيعى حقيقى $q = X'AX$ بواسطة التحويل المتعامد $X=BY$ إلى الشكل القانونى :

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \qquad (21.1)$$

حيث r رتبة A و $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ هى القيم الخاصة الغير صفرية للمصفوفة A .

وهكذا فان رتبة q تساوى عدد القيم الخاصة الغير صفرية للمصفوفة A بينما يساوى الدليل عدد القيم الخاصة الموجبة أو بشكل آخر ، استنادا إلى قاعدة ديكارات الخاصة بالإشارات ، يساوى عدد التغييرات فى الإشارة فى $|\lambda I-A|=O$

VI . تكون مصفوفة متماثلة حقيقية محددة موجبة ، فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) جميع قيمها الخاصة موجبـة .

التشابه المتعامد : إذا كانت P مصفوفة متعامدة وكان $B = P^{-1}AP$ فإننا نقول عن B إنها مشابهة تعامديا مع A حيث أن $P^{-1} = P'$ فإن B تكون أيضا متطابقة تعامديا ومكافئة تعامديا مع A . النظرية III يمكن إعادة صياغتها كما يلى :

VII إن كل مصفوفة متماثلة حقيقية A تكون مشابهة تعامديا لمصفوفة قطرية عناصر قطرها القيم الخاصة لـ A .

أنظر المسألة ٣

لنفرض أن القيم الخاصة للمصفوفة المتماثلة A قد رتبت بحيث يكون $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$. فتكون المصفوفة $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ هى المصفوفة الوحيدة المشابهة لـ A . تشكل مثل هذه المصفوفات القطرية فى مجموعها ، مجموعة قانونية للمصفوفات المتماثلة الحقيقية بالنسبة للتشابه المتعامد ونجـد :

VIII تكون مصفوفتان متماثلتان، حقيقيتان متشابهتين تعامديا إذا كان (وإذا كان فقط) لهما نفس القيم الخاصة أى إذا كانت (وإذا كانتا فقط) متشابهتين .

ازواج من الصيغ التربيعية الحقيقية نبرهن فى المسألة ٤ :

IX إذا كان $X'AX$ و $X'BX$ شكلين تربيعيين حقيقيين فى $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ وإذا كان $X'BX$ محددا موجبا ، فإنه يوجد تحويل خطى حقيقى غير شاذ $X = CY$ يحول $X'AX$ إلى :

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_r y_r^2$$

ويحول $X'BX$ إلى :

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$$

حيث λ_i هى جذور المعادلة $|\lambda B - A| = 0$.

أنظر أيضا المسألتين ٤ – ٥

المصفوفات الهرمتية : بالموازاة مع النظريات الخاصة بالمصفوفات المتماثلة الحقيقية ، يكون لدينا :

X – إن القيم الخاصة لمصفوفة هرمتية مقادير حقيقية .

أنظر المسألة ٧

XI – إن المتجهات اللامتغيرة المصاحبه لقيم خاصة مختلفة (متباينة) لمصفوفة هرمتية ، متعامدة مثنى .

XII – إذا كانت H مصفوفة هرمتية مربعة من الدرجة n قيمها الخاصة هى $\lambda_1 \; \lambda_2 \; \ldots \; \lambda_n$ فإنه توجد مصفوفة واحدية U بحيث يكون $\bar{U}'HU = U^{-1}HU = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. تسمى المصفوفة H بأنها مصفوفة ذات تشابه واحدى لـ $U^{-1}HU$

XIII – إذا كانت λ_i قيمة خاصة ذات تعددية r_i للمصفوفة الهرمتية H ، فإنه يصاحب λ_i فراغ لا متغيرا بعـــده λ_i .

لنفرض أن القيم الخاصة للمصفوفة الهرمتية H قد رتبت بحيث يكون $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$. فتكون المصفوفة $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ هى المصفوفة القطرية الوحيدة المشابهة لـ H .

تكون جميع المصفوفات القطرية ، من هذا النوع ، مجموعة قانونية للمصفوفات الهرمتية بالنسبة للتشابه الواحدى ، ونجد ما يلى :

XIV – تكون مصفوفتان هرمتيتان متشابهتين واحديا ، فيما إذا كان (وإذا كان فقط) لهما نفس القيم الخاصة أى إذا (وإذا فقط) كانتا متشابهتين .

المصفوفات النظامية نقول عن مصفوفة مربعة A من الدرجة n إنها نظامية فيما إذا كان $A\bar{A}' = \bar{A}'A$. تحوى مجموعة المصفوفات النظامية بصورة خاصة المصفوفات القطرية ، المصفوفات المتماثلة الحقيقية ، المصفوفات الحقيقية المتماثلة تخالفيا ، المصفوفات المتعامدة ، المصفوفات الهرمتية ، المصفوفات لهرمتية التخالفية والواحدية .

لنفرض A مصفوفة نظامية و U مصفوفة واحدية ولنكتب $B = \bar{U}'AU$ فيكون $\bar{B}' = \bar{U}'\bar{A}'U$

وعلى ذلك : $\bar{B}'B = \bar{U}'\bar{A}'U \cdot \bar{U}'AU = \bar{U}'\bar{A}'AU = \bar{U}'A\bar{A}'U = \bar{U}'AU \cdot \bar{U}'\bar{A}'U = B\bar{B}'$

XV – إذا كانت A مصفوفة نظامية و U مصفوفة واحدية فإن $B = \bar{U}'AU$ يكون مصفوفة نظامية .

وسنبرهن فى المسألة ٨ :

XVI اذا كان X_i متجها لا متغيرا مناظرا للجذر الخاص λ_i للمصفوفة النظامية A ، فإن X_i تكون أيضاً متجهاً لا متغيرا للمصفوفة $\bar{A}'$ المناظر للقيمة الخاصة $\bar{\lambda}_i$

سنبرهن فى المسألة ٩ :

XVII تكون مصفوفة مربعة A مشابهة واحديا لمصفوفة قطرية قيا إذا كانت (وإذا كانت فقط) المصفوفـة A نظاميـة .

كنتيجة لما سبق ، نجـد :

XVIII إذا كانت A نظامية فإن المتجهات اللامتغيرة المناظرة للقيم الخاصة المتباينة للمصفوفة تكون متعامدة أنظر المسألة ١٠

XIX إذا كانت λ_i قيمة خاصة ذات تعددية r_i لمصفوفة نظامية A ، فإن الفراغ اللامتغير المصاحب لها يكون ذا بعد يساوى r_i .

XX تكون مصفوفتان متشابهتين واحدياً ، إذا كان (وإذا كان فقط) لهما القيم الخاصة ذاتها أى إذا كانتا متشابهتين .

مسائل محلولة

١ — برهن أن القيم الخاصة لمصفوفة مربعة حقيقية متماثلة A ومن الدرجة n كلها حقيقية .

لينفرض أن $h + ik$ قيمة خاصة مركبة للمصفوفة A ، اعتبر :

$$B = \{(h+ik)I - A\}\{(h-ik)I - A\} = (hI - A)^2 + k^2 I$$

التى هى مصفوفة حقيقية وشاذة لأن $(h+ik)\ I-A$ تكون شاذة . يوجد ، إذن ، متجه حقيقى X غير صفرى بحيث يكون $BX = 0$ وعلى ذلك .

$$X'BX = X(hI - A)^2 X + k^2 X'X = X'(hI - A)'(hI - A)X + k^2 X'X = 0$$

إن المتجه $(hI - A)X$ حقيقى وهذا يؤدى إلى $\{(hI - A)X\}'\{(hI - A)X\} \geqq 0.$ وإن $X'X > 0$

أى أن $k = 0$ وإنه لاتوجد قيم خاصة مركبة .

٢ — برهن أن المتجهات اللامتغيرة المصاحبة لقيم خاصة متباينة لمصفوفة حقيقية متماثلة A تكون متعامدة فيما بينها .

لنفرض X_1 و X_2 متجهان لامتغيران مصاحبان على الترتيب للقيمتين الخاصيتين المختلفتين λ_1 و λ_2 للمصفوفة A فينتج عن هذا :

$AX_1 = \lambda_1 X_1$ و $AX_2 = \lambda_2 X_2.$ كما ينتج أيضاً $X_2'AX_1 = \lambda_1 X_2'X_1$ ، و $X_1'AX_2 = \lambda_2 X_1'X_2$

لنأخذ منقول هذه المصفوفات فنجد :

$$X_1'AX_2 = \lambda_1 X_1'X_2 \quad \text{و} \quad X_2'AX_1 = \lambda_2 X_2'X_1$$

وهكذا نجد $\lambda_1 X_1'X_2 = \lambda_2 X_1'X_2$ وبما أن $\lambda_1 \neq \lambda_2$ فإنه يكون $X_1'X_2 = 0$ أى أن X_1 و X_2 متعامدان .

٣ — أوجد مصفوفة متعامدة P بحيث تكون المصفوفة $P^{-1}AP$ مصفوفة قطرية عناصر قطرها القيم الخاصة لـ A إذا علم أن :

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

إن المعادلة المميزة للمصفوفة المفروضة هى :

$$\begin{vmatrix} \lambda-7 & 2 & -1 \\ 2 & \lambda-10 & 2 \\ -1 & 2 & \lambda-7 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 24\lambda^2 + 180\lambda - 432 = 0$$

وإن جذور هذه المعادلة هى 6,6,12 .

القيمة $\lambda = 6$ نجد $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$ أو $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ لنختر كتجهين لامتغيرين مصاحبين المتجهين المتعامدين $X_1 = [1, 0, -1]$ و $X_2 = [1, 1, 1]'$. ولنأخذ فى حالة $\lambda = 12$ المتجه $X_3 = [1,-2,1]'$ كتجه لامتغير آ مرافقاً .

بإستخدام الصيغ المعيرة لهذه المتجهات كأعمدة فى المصفوفة P نجد :

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

سيترك ، كتمرين ، برهان صحة العلاقة $P^{-1}AP = \text{diag}(6, 6, 12)$.

٤ – برهن أنه إذا كان $X'AX$ و $X'BX$ شكلين تربيعيين حقيقيين فى $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ وإذا كان $X'BX$ محدداً موجباً ، فإنه يوجد تحويل خطى حقيقى غير شاذ $X = CY$ يحول $X'AX$ إلى $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$ ويحول $X'BX$ إلى $y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$، حيث $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ تمثل جذور المعادلة $|\lambda B - A| = 0$

يوجد كنتيجة للنظرية VII تحويل متعامد $X = GV$ يحول $X'BX$ إلى

$$V'(G'BG)V = \mu_1 v_1^2 + \mu_2 v_2^2 + \ldots + \mu_n v_n^2 \qquad \text{(i)}$$

حيث $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ هى القيم الخاصة (كلها موجبة) للمصفوفة B .

لنفرض $H = \text{diag}(1/\sqrt{\mu_1}, 1/\sqrt{\mu_2}, \ldots, 1/\sqrt{\mu_n})$. فينتج عن هذا أن $V = HW$ يحول (i) إلى :

$$W'(H'G'BGH)W = w_1^2 + w_2^2 + \ldots + w_n^2 \qquad \text{(ii)}$$

يوجد تحويل متعامد $W = KY$ يحول الشكل التربيعى الحقيقى $W'(H'G'AGH)W$ إلى :

$$Y'(K'H'G'AGHK)Y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$$

حيث $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ هى القيم الخاصة لـ $H'G'AGH$ وهكذا نجد أن هناك تحويلا حقيقياً غير شاذ $X = CY = GHKY$ يحول $X'AX$ إلى $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$ كما يحول $X'BX$ إلى :

$$Y'(K'H'G'BGHK)Y = Y'(K^{-1}IK)Y = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2,$$

وذلك بما أنه لكل قيم λ :

$$K'H'G'(\lambda B - A)GHK = \lambda K'H'G'BGHK - K'H'G'AGHK = \operatorname{diag}(\lambda, \lambda, \dots, \lambda) - \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$
$$= \operatorname{diag}(\lambda - \lambda_1, \lambda - \lambda_2, \dots, \lambda - \lambda_n)$$

فإنه ينتج عن ذلك أن $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, هى جذور المعادلة $|\lambda B - A| = 0$

٥ – استنتاجاً من المسألة ٣ نجد أن التحويل الخطى :

$$X = (GH)W = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1/2\sqrt{3} \end{bmatrix} W$$
$$= \begin{bmatrix} 1/2\sqrt{3} & 1/3\sqrt{2} & 1/6\sqrt{2} \\ 0 & 1/3\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} \\ -1/2\sqrt{3} & 1/3\sqrt{2} & 1/6\sqrt{2} \end{bmatrix} W$$

يحول $q = X'BX = X' \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix} X$ إلى $W'IW$.

إن نفس التحويل يحول

$X'AX = X' \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} X$ إلى $W' \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} W$

بما أن المصفوفة الأخيرة مصفوفة قطرية فإن التحويل $W=KY$ الوارد فى المسألة ٤ هو التحويل المحايد $W = IY$.

وهكذا نجد أن التحويل الخطى الحقيقى $X=CY=(GH)Y$ يحول الشكل التربيعى المحدد الموجب $X'BX$ إلى $y_1^2+y_2^2+y_3^2$ ويحول الشكل التربيعى $X'AX$ إلى $\frac{1}{3}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 + \frac{1}{2}y_3^2$. يرجى ، كتمرين ، البرهان على صحة العلاقة $|\lambda B - A| = 36(3\lambda - 1)(2\lambda - 1)^2$.

٦ – برهن أنه يمكن كتابة كل مصفوفة A حقيقية غير شاذة بالشكل $A=CP$ حيث C مصفوفة محددة موجبة ومتماثلة و P مصفوفة متعامدة .

بما أن A غير شاذة ، فإنه AA' ، استناداً إلى النظرية X الفصل ١٧ ، تكون مصفوفة محددة موجبة ومتماثلة أى أنه توجد مصفوفة متعامدة Q بحيث يكون $Q^{-1}AA'Q = \operatorname{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n) = B$ حيث كل $0 < k_i$. لنعرف المصفوفتين $B_1 = \operatorname{diag}(\sqrt{k_1}, \sqrt{k_2}, \dots, \sqrt{k_n})$ و $C = QB_1Q^{-1}$ فينتج أن C مصفوفة محددة موجبة ومتناظرة وأن $C^2 = QB_1Q^{-1}QB_1Q^{-1} = QB_1^2Q^{-1} = QBQ^{-1} = AA'$

لنعرف $P=C^{-1}A$ فيكون $PP' = C^{-1}AA'C^{-1} = C^{-1}C^2C^{-1} = I$ ونستنتج أن P مصفوفة متعامدة . وهذا نكون قد برهنا على أن $A=CP$ حيث C محددة موجبة ومتماثلة و P مصفوفة متعامدة كما هو مطلوب .

٧ – برهن : أن القيم الخاصة لمصفوفة هرمتية كلها حقيقية .

لتكن λ_i قيمة خاصة للمصفوفة الهرمتية H يوجد عندئذ متجه غير صفرى X_i يحقق العلاقة $HX_i = \lambda_i X_i$

والآن $X'_i H X_i = \lambda_i \bar{X}'_i X_i$ حقيق ويختلف عن الصفر ويكون الأمر ذاته بالنسبة لمنقول المصفوفة المرافقة $\bar{X}'_i H X_i = \bar{\lambda}_i \bar{X}'_i X_i$. وهكذا نجد أن $\bar{\lambda}_i = \lambda_i$ أى أن λ_i حقيق .

٨ – برهن أنه إذا كان X_i متجهاً لامتغيراً مناظراً للقيمة الخاصة λ_i لمصفوفة نظامية A ، فإن X_i يكون متجهاً لامتغيراً لـ A^1 يناظر القيمة الخاصة λ_i .

بما أن A نظامية فإنه يكون :

$$(\lambda I - A)(\overline{\lambda I - A})' = (\lambda I - A)(\bar{\lambda} I - \bar{A}') = \lambda\bar{\lambda} I - \lambda\bar{A}' - \bar{\lambda} A + A\bar{A}'$$
$$= \bar{\lambda}\lambda I - \lambda\bar{A}' - \bar{\lambda} A + \bar{A}'A = (\overline{\lambda I - A})'(\lambda I - A)$$

وهكذا نجد أن $A - \lambda I$ مصفوفة نظامية – وبما أننا فرضنا $BX_i = (\lambda_i I - A)X_i = 0;$ فإن :

$$(\overline{BX_i})'(BX_i) = \bar{X}'_i \bar{B}' \cdot BX_i = \bar{X}'_i B \cdot \bar{B}' X_i = (\overline{\bar{B}' X_i})'(\bar{B}' X_i) = 0 \quad \text{و} \quad \bar{B}' X_i = (\bar{\lambda}_i I - \bar{A}')X_i = 0$$

وإن X_i متجه لامتغيراً لـ A^1 يناظر القيمة الخاصة $\bar{\lambda}_i$.

٩ – برهن أن مصفوفة A مربعة ومن الدرجة n ، تكون مشابهة واحدياً لمصفوفة قطرية ، فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) مصفوفة نظامية .

لنفرض A نظامية فإنه يوجد ، كنتيجة للنظرية VIII من الفصل ٢٠ ، مصفوفة واحدية U بحيث يكون :

$$\bar{U}'AU = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1,n-1} & b_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & b_{23} & \cdots & b_{2,n-1} & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = B$$

ونجد استناداً إلى النظرية XV أن B نظامية وأن $\bar{B}'B = B\bar{B}'$. والآن ، إن العنصر الواقع فى الصف الأول والعمود الأول من $\bar{B}'B$ هو $\bar{\lambda}_1 \lambda_1$ بينما يكون العنصر المناظر له فى $B\bar{B}'$ هو :

$$\lambda_1\bar{\lambda}_1 + b_{12}\bar{b}_{12} + b_{13}\bar{b}_{13} + \dots + b_{1n}\bar{b}_{1n}$$

بما أن هذه العناصر متساوية وأن كل $b_{1j}\bar{b}_{1j} \geqq 0,$ فإننا نستنتج أن كل $b_{1j} = 0$. وبالاستطراد بالنسبة للعنصر الواقع فى الصف الثانى والعمود الثانى ... وهكذا ، فإننا نستنتج أن كل b_{ij} من B يساوى الصفر وأن $B = \text{dia}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$ على العكس ، لنفرض أن A مصفوفة قطرية فتكون A نظامية .

١٠ – برهن أنه إذا كانت A مصفوفة نظامية فإن المتجهات اللامتغيرة المناظرة للقيم الخاصة المتباينة لهذه المصفوفة ، تكون متعامدة .

لتكن λ_1 و λ_2 قيمتين خاصيتين متباينتين والمتجهين اللامتغيرين المرافقين X_1 و X_2 للمصفوفة A فيكون $A X_1 = \lambda_1 X_1$ و $A X_2 = \lambda_2 X_2$ ونجد استناداً إلى المسألة ٨ أن $AX_1 = \lambda_1 X_1, \; AX_2 = \lambda_2 X_2$ والآن $\bar{X}'_2 A X_1 = \lambda_1 \bar{X}'_2 X_1$ وبأخذ المرافق نجد : $\bar{X}'_1 \bar{A}' X_2 = \bar{\lambda}_1 \bar{X}'_1 X_2.$ ولكن $\bar{X}'_1 \bar{A}' X_2 = \bar{\lambda}_2 \bar{X}'_1 X_2.$. وهكذا نجد $\bar{\lambda}_1 \bar{X}'_1 X_2 = \bar{\lambda}_2 \bar{X}'_1 X_2$ وبما أن $\lambda_1 \neq \lambda_2$ فإن العلاقة $\bar{X}'_1 X_2 = 0$ تكون قد برهنت كما هو مطلوب .

١١ – اعتبر القطع المخروطى : $x_1^2 - 12x_1x_2 - 4x_2^2 = 40$ أو

$$X'AX = X' \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} X = 40 \qquad \text{(i)}$$

منسوباً لمجموعة محاور الاحداثيات المتعامدة OX_1 و OX_2

أن المعادلة المميزة لـ A هي :

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 6 \\ 6 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda + 8) = 0$$

لنأخذ القيمتين الخاصيتين $\lambda_1 = 5$ و -8 . λ_2 المتجهين اللامتغيرين $[3,-2]'$ و $[2,3]'$ المصاحبين على الترتيب لهاتين القيمتين الآن لنشكل المصفوفة المتعامدة $P = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{13} & 2/\sqrt{13} \\ -2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \end{bmatrix}$ حيث عموداها هما المتجهان المذكوران آنفا ، بعد تغييرها .

إن التحويل $X = PY$ يختزل (i) إلى

$$Y'\begin{bmatrix} 3/\sqrt{13} & -2/\sqrt{13} \\ 2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3/\sqrt{13} & 2/\sqrt{13} \\ -2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \end{bmatrix}Y = Y'\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}Y = 5y_1^2 - 8y_2^2 = 40$$

ونجد أن القطع المخروطى المفروض قطع زائد .

إن هذه الطريقة قد قامت بعملية دوران المحاور المعتادة فى الهندسة التحليلية المستوية والتى تهدف إلى حذف حاصل الضرب المتقاطع فى معادلة القطع المخروطى . ولنلاحظ أن استناداً إلى النظرية VII يعرف هذا الناتج عندما تعرف القيم الخاصة للمصفوفة .

١٢ – إن إحدى مسائل الهندسة التحليلية فى الفراغ ، هى اختزال معادلة سطح تربيعى ، بواسطة انتقال ودوران المحاور ، إلى أبسط أشكالها . إن الصعوبة تكمن فى تحديد موضع المركز . وتعيين الإتجاهات الرئيسية أى إتجاهات محاور القطع بعد الدوران .

سنبين فيما يلى . بدون تبرير لمراحل البرهان المتتالية ، دور مصفوفتين فى اختصار معادلة سطح تربيعى مركزى .

ليكن السطح $3x^2 + 2xy + 2xz + 4yz - 2x - 14y + 2z - 9 = 0$, المصفوفتان المتماثلتان :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -7 & 1 & -9 \end{bmatrix}$$

المكونة على الترتيب من الحدود ذات الدرجة الثانية ومن كل الحدود .

إن المعادلة المميزة لـ A هي

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -2 \\ -1 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

وإن القيم الخاصة ومتجهات الوحدة اللامتغيرة المصاحبة هى :

$$\lambda_1 = 1, \quad v_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right]'; \qquad \lambda_2 = 4, \quad v_2 = \left[\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right] \qquad \lambda_3 = -2, \quad v_3 = \left[0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]'$$

بإستخدام تحويلات الصفوف الأولية $H_j(K)$ و $H_{ij}(K)$ فقط) حيث $j \neq 4$ فإننا نجد :

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline -1 & -7 & 1 & -9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}$$

لتعتبر B_1 كمصفوفة ممدة لمجموعة المعادلات $\begin{cases} 3x + y + z - 1 = 0 \\ x + 2z - 7 = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$ فنجد من D_1

الحل $x = 1, y = 0, Z = 4$ أو $C(-1,0,4)$ ومن D_2 نجد : $d = -4$

إن رتبة A تساوى 3 ورتبة B تساوى 4 وإن مركز السطح التربيعى يقع فى النقطة $C(-1,0,4)$ وتكون المعادلة المختزلة المطلوبة هى :

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + d = X^2 + 4Y^2 - 2Z^2 - 4 = 0$$

إن معادلات الإنتقال هى $Z = Z' + 4$ و $y = y'$, $x = x - 1$,

وإن الإتجاهات الرئيسية هى v_1, v_2, v_3 لنرمز بالرمز E لمعكوس المصفوفة $[v_1, v_2, v_3]$ فتكون معادلات دوران المحاور إلى الإتجاهات الرئيسية هى :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = [X\ Y\ Z] \cdot E = [X\ Y\ Z] \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

مسائل اضـافية

١٣ – أوجد ، لكل من المصفوفات A المتماثلة الحقيقية التالية ، مصفوفة متعامدة P بحيث تكون المصفوفة $P^{-1}AP$ قطرية عناصر قطرها القيم الخاصة للمصفوفة A .

(ا) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ، (ب) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ، (جـ) $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ ، (د) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ، (هـ) $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

الجواب : (ا) $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ ، (ب) $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$ ، (جـ) $\begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{bmatrix}$

(د) $\begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & -2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$ ، (هـ) $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$

١٤ – أوجد تحويلا خطياً يختزل $X'BX$ إلى (17) $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ ، $X'AX$ إلى $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2$ ، حيث λ_i هى جذور المعادلة $|\lambda B - A| = 0$ علما أن :

(ا) $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$ (ب) $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{bmatrix}$

الجـواب : (ا) $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} & 1/3 \\ 0 & -2/3\sqrt{2} & 1/3 \\ -1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} & 1/3 \end{bmatrix}$ ، (ب) $\begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3\sqrt{10} \\ -2/3 & 1/3 & 2/3\sqrt{10} \\ 1/3 & -2/3 & 2/3\sqrt{10} \end{bmatrix}$

١٥ – برهن النظرية IV .

إرشاد : إذا كان $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_1, \lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \ldots, \lambda_n)$، فإن $^1(\lambda_1 I - A)P = \text{diag}(0, 0, \ldots, 0,$ $\lambda_1 - \lambda_{r+1}, \lambda_1 - \lambda_{r+2}, \ldots, \lambda_1 - \lambda_n)$ تكون من رتبة تساوى $n - r$

١٦ – عدل فى برهان المسألة ٢ لكى تبرهن النظرية XI .

١٧ – برهن النظريات : XII و XIII و XIX .

١٨ – عين كلا من المحلات الهندسية التالية :

(ا) $20x_1^2 - 24x_1x_2 + 27x_2^2 = 369,$ (جـ) $108x_1^2 - 312x_1x_2 + 17x_2^2 = 900,$

(ب) $3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 = 4,$ (د) $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 8$

١٩ – تفرض A مصفوفة حقيقية ومتماثلة تخالفية ، برهن :

(ا) أن كل قيمة خاصة لـ A إما أن تساوى الصفر أو أن تكون تخيلية بحتة .

(ب) أن $I + A$ و $I - A$ غير شاذتين .

(جـ) $B = (I+A)^{-1}(I-A)$ مصفوفة متعامدة . (أنظر المسألة ٣٥ من الفصل ١٣) .

٢٠ – برهن أنه إذا كانت A مصفوفة نظامية وغير شاذة فإن A^{-1} يكون كذلك .

٢١ – برهن أنه إذا كانت A مصفوفة نظامية فإن A تكون مشابهة لـ A' .

٢٢ – برهن أن مصفوفة مربعة A تكون نظامية فيما إذا كان (وإذا كان فقط) من الممكن تمثيلها بالشكل $H + iK$ حيث H و K مصفوفتان هرمتيتان تبديليتان.

٢٣ – إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n قيمها الخاصة $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. فإن A تكون نظامية فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) القيم الخاصة لـ $A\bar{A}'$ هى $\lambda_1\bar{\lambda}_1, \lambda_2\bar{\lambda}_2, \ldots, \lambda_n\bar{\lambda}_n$.

إرشاد : اكتب $U^{-1}AU = T = [t_{ij}]$ حيث U مصفوفة واحدية و T مصفوفة مثلثية . إن $\text{tr}(T\bar{T}') = \text{tr}(A\bar{A}')$ تتطلب $t_{ij} = 0$ لقيم $i \neq j$.

٢٤ – برهن أنه إذا كانت A مصفوفة غير شاذة ، فإن $A\bar{A}'$ تكون مصفوفة هرمتية محددة موجبة . اذكر هذه النظرية عندما تكون A مصفوفة حقيقية وغير شاذة .

٢٥ – برهن أنه إذا كانت A و B مصفوفتين مربعتين من الدرجة n ونظاميتين وإذا كانت A و $\bar{B}'$ تبديليتين فإن AB و BA مصفوفتان نظاميتان .

٢٦ – لنفرض أن الدالة المميزة للمصفوفة A المربعة من الدرجة n هى :

$$\phi(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\ldots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$$

ولنفرض أنه توجد مصفوفة غير شاذة P بحيث يكون :

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1 I_{r_1}, \lambda_2 I_{r_2}, \ldots, \lambda_s I_{r_s}) \quad (1)$$

لنرمز بالرمز B_i حيث ($i = 1, 2, \ldots, s$) للمصفوفات المربعة ذات الدرجة $(0, 0, \ldots, 0, I_{r_i}, 0, \ldots, 0)$ التى نحصل عليها بالاستعاضة عن λ_i بـ 1 وعن λ_j ($j \neq i$) بصفر فى الطرف الأيمن من (1) ولنفرض :

$$E_i = PB_iP^{-1}, \quad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

برهن أن :

(ا) $P^{-1}AP = \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \ldots + \lambda_s B_s$

(ب) $A = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \ldots + \lambda_s E_s$

(جـ) كل واحدة من E_i متحدة القوى .

(د) $E_i E_j = 0$ لقيم $i \neq j$

(هـ) $E_1 + E_2 + \ldots + E_s = I$

(و) إن رتبة E_i تساوى قوة تضاعف (تعددية) القيمة الخاصة λ_i

(ز) $(\lambda_i I - A)E_i = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, s)$

(ج) إذا كان $p(x)$ كثيرة حدود فى x فإن $p(A) = p(\lambda_1)E_1 + p(\lambda_2)E_2 + \dots + p(\lambda_s)E_s$.

إرشاد : برهن أن : $A^2 = \lambda_1^2 E_1 + \lambda_2^2 E_2 + \dots + \lambda_s^2 E_s$ ، $A^3 = \lambda_1^3 E_1 + \lambda_2^3 E_2 + \dots + \lambda_s^3 E_s, \dots$

(ط) إن كل E_i كثيرة حدود فى A .

إرشاد : افرض $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\dots(\lambda - \lambda_s)$ و $f_i(\lambda) = f(\lambda)/(\lambda - \lambda_i), \ (i = 1, 2, \dots, s)$.

فيكون عندئذ $f_i(A) = f_i(\lambda_i)E_i$.

(ى) تكون المصفوفة B تبديلية مع A فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) تبديلية مع كل E_i

إرشاد : إذا كانت B تبديلية مع A فإنها تكون تبديلية مع كل كثيرة حدود A

(ك) إذا كانت A مصفوفة نظامية فإن كل مصفوفة E_i هرمتية .

(ل) إذا كانت A مصفوفة غير شاذة فإن :

$$A^{-1} = \lambda_1^{-1}E_1 + \lambda_2^{-1}E_2 + \dots + \lambda_s^{-1}E_s$$

(م) إذا كانت A مصفوفة هرمتية محددة موجبة فإن :

$$H = A^{1/2} = \sqrt{\lambda_1}\,E_1 + \sqrt{\lambda_2}\,E_2 + \dots + \sqrt{\lambda_s}\,E_s$$

تكون مصفوفة هرمتية محددة موجبة .

(ن) تسمى المعادلة (ب) **التحليل الطيفى** للمصفوفة A . برهن أن هذه المعادلة وحيدة .

٢٧ – (ا) أوجد التحليل الطيفى لـ

$$A = \begin{bmatrix} 24 & -20 & 10 \\ -20 & 24 & -10 \\ 10 & -10 & 9 \end{bmatrix} = 49\begin{bmatrix} 4/9 & -4/9 & 2/9 \\ -4/9 & 4/9 & -2/9 \\ 2/9 & -2/9 & 1/9 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 5/9 & 4/9 & -2/9 \\ 4/9 & 5/9 & 2/9 \\ -2/9 & 2/9 & 8/9 \end{bmatrix}$$

(ب) أوجد

$$A^{-1} = \frac{1}{196}\begin{bmatrix} 29 & 20 & -10 \\ 20 & 29 & 10 \\ -10 & 10 & 44 \end{bmatrix}$$

(جـ) أوجد

$$A^{1/2} = \begin{bmatrix} 38/9 & -20/9 & 10/9 \\ -20/9 & 38/9 & -10/9 \\ 10/9 & -10/9 & 23/9 \end{bmatrix}$$

٢٨ – برهن أنه إذا كانت A مصفوفة نظامية وتبديلية مع B ، فإن $\bar{A}'$ و B تبديليتان .

إرشاد : استفد من المسألة ٢٦ (ى) .

٢٩ – برهن أنه إذا كانت A مصفوفة غير شاذة فإنه توجد مصفوفة واحدية U ومصفوفة هرمتية محددة موجبة H بحيث يكون $A = HU$

إرشاد : عرف H بالعلاقة $H^2 = A\bar{A}'$ و $U = H^{-1}A$.

٣٠ – برهن أنه إذا كانت A مصفوفة غير شاذة فإن A تكون نظامية فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) المصفوفتان H و U الواردتان فى المسألة ٢٩ ، تبديليتين .

٣١ – برهن أن المصفوفة المربعة A تكون مشابهة لمصفوفة قطرية فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) توجد مصفوفة هرمتية محددة موجبة H بحيث يكون $H^{-1}AH$ مصفوفة نظامية .

٣٢ – برهن أن مصفوفة حقيقية متماثلة (هرمتية) تكون متحدة القوى فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) قيمها الخاصة مساوية للصفر أو للواحد .

٣٣ - برهن أنه إذا كانت A مصفوفة حقيقية متماثلة (هرمتية) ومتحدة القوى فإن $\text{r}A = \text{tr}\, A$.

٣٤ - لنفرض أن A مصفوفة نظامية وأن $B = I + A$ مصفوفة غير شاذة وأن $C = B^{-1}\bar{B}'$

برهن : (ا) أن A و $(\bar{B}')^{-1}$ تبديليتان . (ب) أن C مصفوفة واحدية .

٣٥ - برهن أنه إذا كانت H مصفوفة هرمتية فإن $(I+iH)^{-1}(I-iH)$ تكون مصفوفة واحدية .

٣٦ - إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n فإن مجموعة الأعداد $\bar{X}' A X$ حيث X متجه وحدة ، تسمى حقل قيم A . برهن مايلى :

(ا) تقع القيم الخاصة لـ A فى حقل قيمها .

(ب) يقع كل عنصر قطرى من A وكل عنصر قطرى من المصفوفة $U^{-1} A U$ حيث U مصفوفة واحدية ، فى حقل قيم A .

(جـ) إذا كانت A مصفوفة حقيقية متماثلة (هرمتية) فإن كل عنصر من حقل قيمها يكون حقيقياً .

(د) إذا كانت A مصفوفة حقيقية متماثلة (هرمتية) فإن حقل قيمها هو مجموعة الأعداد الحقيقية والمحققة للعلاقة $\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_n$ حيث λ_1 هى أصغر القيم الخاصة لـ A و λ_n أكبر هذه القيم الخاصة .

الفصل الثاني والعشرون

كثيرات الحدود على حقل

مجال (نطاق) كثيرات الحدود على F لتكن λ رمزاً مجرداً (غير معين) ولنفرض أنه قابل التبديل مع نفسه ومع كل عنصر من حقل F نسمى التعبير .

$$f(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0\lambda^0 \qquad (22.1)$$

حيث a_i هى عناصر من F ، كثير حدود فى λ على F

إذا كانت كل $a_i = 0$ فإن (22.1) يسمى صفر **كثيرات الحدود** ونكتب $f(\lambda) = 0$ إذا كان $a_n \neq 0$ فإننا نقول عن (22 . 1) إنه من الدرجة n ونسمى a_n **معاملة المتقدم** . نقول عن كثير الحدود $f(\lambda) = a_0\lambda^0 = a_0 \neq 0$ إنه من الدرجة صفر . إن درجة صفر كثيرات الحدود غير معرف .

إذا كان $a_n = 1$ فى (22.1) فإن كثير حدود يسمى واحدى .

نقول عن كثيرى الحدود فى λ اللذين ، بصرف النظر عن الحدود ذات المعاملات الصفرية ، يحويان نفس الحدود ، إنهما متساويان .

نسمى كثيرات الحدود (22.1) فى مجموعها مجال كثيرات الحدود $F[\lambda]$ على F .

المجموع وحاصل الضرب : إذا اعتبرنا كل كثير حدود من $F[\lambda]$ كعنصر من مجموعة أعداد ، فإنه يكون لنطاق كثيرات الحدود أغلب خواص الحقل وليست كلها .

مثـال ذلك :

$$f(\lambda)\cdot g(\lambda) = g(\lambda)\cdot f(\lambda) \quad , \quad f(\lambda)+g(\lambda) = g(\lambda)+f(\lambda)$$

إذا كان $f(\lambda)$ من الدرجة m و $g(\lambda)$ من الدرجة n فإنه يكون :

(i) $f(\lambda)+g(\lambda)$ يكون من الدرجة m إذا كان $m > n$ ومن درجة لاتزيد عن m إذا كانت $m = n$ ومن الدرجة n إذا كان $m < n$.

(ii) $f(\lambda)\cdot g(\lambda)$ يكون من الدرجة $m + n$.

إذا كان $f(\lambda) \neq 0$ بينما $f(\lambda)\cdot g(\lambda) = 0$ فإن $g(\lambda) = 0$.

وإذا كان $g(\lambda) \neq 0$ و $h(\lambda)\cdot g(\lambda) = k(\lambda)\cdot g(\lambda)$, فإن $h(\lambda) = k(\lambda)$.

خارج القسـمة :

سنبرهن فى المسألة ١ :

I إذا كان $f(\lambda)$ و $g(\lambda) \neq 0$ كثيرى حدود من $F[\lambda]$ فإنه يوجد كثيرا حدود وحيدان $h(\lambda)$ و $r(\lambda)$ من $F[\lambda]$ حيث $r(\lambda)$ أما أن تكون صفر كثيرات الحدود أو من درجة أقل من درجة $g(\lambda)$ ، بحيث يكون :

$$f(\lambda) = h(\lambda)\cdot g(\lambda) + r(\lambda) \qquad (22.2)$$

تسمى هنا $r(\lambda)$ باقى قسمة $f(\lambda)$ على $g(\lambda)$. إذا كان $r(\lambda) = 0$ فإننا نقول إن $g(\lambda)$ يقسم $f(\lambda)$ وإن $g(\lambda)$ و $h(\lambda)$ فتسمى عوامل $f(\lambda)$.

لنفرض ان $f(\lambda) = h(\lambda) \cdot g(\lambda)$. إذا كان $g(\lambda)$ من الدرجة صفر أى إذا كان $g(\lambda) = c$ حيث c عدد ثابت فإننا نقول عن هذا التحليل إلى العوامل إنه تافه . نقول عن كثير الحدود الغير ثابت على F ، إنه غير قابل للاختزال على F فيما إذا كان تحليله الوحيد إلى عوامل تافه .

مثال ١ : إن $\lambda^2 - 3$ غير قابل للاختزال على حقل الأعداد الجذرية ، وهو قابل للتحليل على حقل الأعداد الحقيقية بالشكل $(\lambda+\sqrt{3})(\lambda-\sqrt{3})$. أن λ^2+4 غير قابل للاختزال على حقل الأعداد الحقيقية (وبالتالى على حقل الأعداد الجذرية) بينما يمكن تحليله على حقل الأعداد المركبة بالشكل $(\lambda+2i)(\lambda-2i)$.

نظرية الباقى ليكن $f(\lambda)$ أى كثير حدود و $g(\lambda) = \lambda - a$. فنأخذ هنا العلاقة (22.2) الشكل التالى :

$$f(\lambda) = h(\lambda) \cdot (\lambda - a) + r \qquad (22.3)$$

حيث r خالية من λ . ينتج عن (22.3) أن $f(a) = r$ ويكون :

II. إذا قسم $f(\lambda)$ على $\lambda - a$ حتى نحصل على باق خال من λ فإن هذا الباقى يكون $f(a)$.

III. يكون $(\lambda - a)$ أحد عوامل كثير الحدود $f(\lambda)$ إذا كان (وإذا كان فقط) $f(a) = 0$

القاسم المشترك الأعظم : إذا قسم $h(\lambda)$ كلا من $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ فإننا نسميه قاسما مشتركا لكل من $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$

نقول عن كثير حدود $d(\lambda)$ إنه قاسم مشترك أعظم لكل من $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ فيما إذا كان :

(i) $d(\lambda)$ واحدياً .

(ii) $d(\lambda)$ قاسم مشترك لكل من $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$

(iii) كل قاسم مشترك لكل من $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ يكون قاسما لـ $d(\lambda)$

سنبرهن فى المسألة ٢ :

VI إذا كان $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ كثيرى حدود من $F[\lambda]$ ليسا معدومين فى وقت واحد معـا ، فإنه يوجد لهما قاسم مشترك أعظم وحيد $d(\lambda)$ كما يوجد فى $F[\lambda]$ كثيرا حدود $d(\lambda)$ و $k[\lambda]$ بحيث يكون :

$$d(\lambda) = h(\lambda) \cdot f(\lambda) + k(\lambda) \cdot g(\lambda) \qquad (22.4)$$

أنظـر المسألة ٣

إذا كان القاسم المشترك الوحيد لكثيرى الحدود $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ ثوابت فإن القاسم المشترك الأعظم لهما هو $d(\lambda) = 1$

مثال ٢ : إن القاسم المشترك الأعظم لـ $f(\lambda) = (\lambda^2+4)(\lambda^2+3\lambda+5)$ و $g(\lambda) = (\lambda^2-1)(\lambda^2+3\lambda+5)$ هو $\lambda^2+3\lambda+5$ وإن (22.4) تكون

$$\lambda^2 + 3\lambda + 5 = \frac{1}{5} f(\lambda) - \frac{1}{5} g(\lambda)$$

ولدينا أيضاً $(1-\lambda^2) \cdot f(\lambda) + (\lambda^2+4) \cdot g(\lambda) = 0$. إن هذا يوضح :

V إذا كان القاسم المشترك الأعظم لكثير الحدود $f(\lambda)$ ذى الدرجة $n > 0$ ولكثير الحدود $g(\lambda)$ ذى الدرجة $m>0$ ، مخالفاً للواحد ، فإنه يوجد كثير حدود غير صفرى $a(\lambda)$ من درجة أقل من m وكثير حدود $b(\lambda)$ درجته أصغر من n بحيث يكون :

$$a(\lambda) \cdot f(\lambda) + b(\lambda) \cdot g(\lambda) = 0$$

والعكس صحيح

أنظـر المسألة ٤

كثيرات الحدود الأولية نسبياً :

نقول عن كثيرى حدود إنهما أوليان نسبيا فيما إذا كان قاسمهما المشترك الأعظم هو الواحد .

IV. إذا كان $g(\lambda)$ غير قابل للاختزال فى $F[\lambda]$ وكان $f[\lambda]$ كثير حدود من $F[\lambda]$ فإنه إما أن يكون $g(\lambda)$ قاسما لـ $f(\lambda)$ وإما أن يكون $g(\lambda)$ أوليا نسبياً مع $f(\lambda)$.

VII. إذا كان $g(\lambda)$ غير قابل للاختزال ولكنه يقسم $h(\lambda) \cdot f(\lambda)$ فإنه يقسم على الأقل واحداً من $f(\lambda)$ و $h(\lambda)$.

VIII. إذا كان $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ أوليين نسبياً وإذا كان كل منهما قاسما لـ $h(\lambda)$ فإن $f(\lambda) \cdot g(\lambda)$ يكون قاسما لـ $h(\lambda)$.

التحليل الوحيد : سنبرهن فى المسألة ٥ مايلى :

IX يمكن كتابة كل كثير حدود غير صفرى $f(\lambda)$ فى $F[\lambda]$ بالشكل :

$$f(\lambda) = c \cdot q_1(\lambda) \cdot q_2(\lambda) \ldots q_r(\lambda) \tag{22.5}$$

حيث $c \neq 0$ ثابت و $q_i(\lambda)$ كثير حدود واحدى غير قابل للاختزال من $F[\lambda]$.

مسائل محلولة

١ - برهن أنه إذا كان $f(\lambda)$ و $g(\lambda) \neq 0$ كثيرى حدود فى $F[\lambda]$ ، فإنه يوجد كثيرا حدود ، وحيدين $h(\lambda)$ و $r(\lambda)$ فى $F[\lambda]$ حيث $r(\lambda)$ إما أن يكون صفر كثيرات الحدود أو أن يكون من درجة أقل من درجة $g(\lambda)$ وبحيث يكون :

$$f(\lambda) = h(\lambda) \cdot g(\lambda) + r(\lambda) \tag{i}$$

لنفرض :

$$f(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

و

$$g(\lambda) = b_m\lambda^m + b_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0, \qquad b_m \neq 0$$

إن من الواضح أن هذه النظرية صحيحة إذا كان $f(\lambda) = 0$ أو إذا كان $n < m$ لنفرض أن $m \leq n$ فيكون عندئذ :

$$f(\lambda) - \frac{a_n}{b_m}\lambda^{n-m}g(\lambda) = f_1(\lambda) = c_p\lambda^p + c_{p-1}\lambda^{p-1} + \cdots + c_0$$

إما أن يكون صفر كثيرات الحدود أو أن يكون من درجة أقل من درجة $f(\lambda)$.

إذا كان $f_1(\lambda) = 0$ أو كان من درجة أقل من درجة $g(\lambda)$ فإننا نكون قد برهنا النظرية حيث $h(\lambda) = \frac{a_n}{b_m}\lambda^{n-m}$ و $r(\lambda) = f_1(\lambda)$ وإذا لم يكن ذلك نكون :

$$f(\lambda) - \frac{a_n}{b_m}\lambda^{n-m}g(\lambda) - \frac{c_p}{b_m}\lambda^{p-m}g(\lambda) = f_2(\lambda)$$

مرة ثانية إذا كان $f_2(\lambda) = 0$ أو من درجة أقل من درجة $g(\lambda)$ فإننا نكون قد برهنا النظرية ، وإذا لم يكن ذلك ، نكرر هذه الطريقة . بما أن درجة الباقى (التى نفرضها لاتساوى الصفر) تنخفض فى كل مرحلة من مراحل البرهان

فإننا سنجد ، فى آخر الأمر ، باقياً $r(\lambda) = f_s(\lambda)$ يكون إما صفر كثيرات الحدود أو من درجة أقل من درجة $g(\lambda)$.

لبرهان الوحدانية نفرض :

$$f(\lambda) = k(\lambda)\cdot g(\lambda) + s(\lambda) \quad \text{و} \quad f(\lambda) = h(\lambda)\cdot g(\lambda) + r(\lambda)$$

حيث درجتا $r(\lambda)$ و $s(\lambda)$ تقلان عن درجة $g(\lambda)$ ويكون :

$$h(\lambda)\cdot g(\lambda) + r(\lambda) = k(\lambda)\cdot g(\lambda) + s(\lambda)$$

و

$$[k(\lambda) - h(\lambda)]g(\lambda) = r(\lambda) - s(\lambda)$$

والآن $r(\lambda) - s(\lambda)$ يكون من درجة أقل من m بينما تكون درجة $[k(\lambda) - h(\lambda)]\, g(\lambda)$ تساوى أو تزيد عن m باستثناء الحالة التى يكون فيها $k(\lambda)-h(\lambda) = 0$. إذن $k(\lambda) - h(\lambda) = 0$ و $r(\lambda)-s(\lambda) = 0$. أى أن $k(\lambda) = h(\lambda)$ و $r(\lambda) = s(\lambda)$ وهذا يقتضى أن يكون $h(\lambda)$ و $r(\lambda)$ وحيدين .

٢ – برهن أنه إذا كان $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ كثيرى حدود فى $F(\lambda)$ ليسا معدومين معا ، فإنه يكون لهما قاسم مشترك أعظم وحيد $d(\lambda)$ كما يوجد كثيراً حدود $h(\lambda)$ و $k(\lambda)$ فى F بحيث يكون :

$$d(\lambda) = h(\lambda)\cdot f(\lambda) + k(\lambda)\cdot g(\lambda) \qquad \text{(a)}$$

إذا كان $f(\lambda) = 0$ فإن $d(\lambda) = b_m^{-1} g(\lambda)$ حيث b_m هو المعامل المتقدم فى $g(\lambda)$ ونحصل على (a) حيث $h(\lambda) = 1$ و $k(\lambda) = b_m^{-1}$

لنفرض الآن ، أن درجة $g(\lambda)$ لاتزيد عن درجة $f(\lambda)$. نستنتج من النظرية I أن :

$$f(\lambda) = q_1(\lambda)\cdot g(\lambda) + r_1(\lambda) \qquad \text{(i)}$$

حيث يكون $r_1(\lambda) = 0$ أو أنه يكون من درجة أقل من درجة $g(\lambda)$. إذا كان $r_1(\lambda)=0$ فإن $d(\lambda)=b_m^{-1}g(\lambda)$ ونحصل على (a) حيث $h(\lambda) = 0$ و $k(\lambda)=b_m^{-1}$

إذا كان $r_1(\lambda) \neq 0$ فإننا نجد :

$$g(\lambda) = q_2(\lambda)\cdot r_1(\lambda) + r_2(\lambda) \qquad \text{(ii)}$$

حيث يكون $r_2(\lambda)=0$ أو أنه يكون من درجة أقل من درجة $r_1(\lambda)$. إذا كان $r_2(\lambda) = 0$ فإنه ينتج عن (i) أن

$$r_1(\lambda) = f(\lambda) - q_1(\lambda)\cdot g(\lambda)$$

ونحصل منها على (a) بأن نقسم على المعامل المتقدم فى $r_1(\lambda)$.

إذا كان $r_2(\lambda) \neq 0$ فإننا نجد :

$$r_1(\lambda) = q_3(\lambda)\cdot r_2(\lambda) + r_3(\lambda) \qquad \text{(iii)}$$

حيث $r_3(\lambda) = 0$ أو يكون من درجة أدنى من درجة $r_2(\lambda)$. إذا كان $r_3(\lambda)=0$ فإننا نحصل من (i) و (ii) على

$$r_2(\lambda) = g(\lambda) - q_2(\lambda)\cdot r_1(\lambda) = g(\lambda) - q_2(\lambda)[f(\lambda) - q_1(\lambda)\cdot g(\lambda)]$$
$$= -q_2(\lambda)\cdot f(\lambda) + [1 + q_1(\lambda)\cdot q_2(\lambda)]g(\lambda)$$

ومنها نحصل على (a) بأن نقسم على المعامل المتقدم لـ $r_2(\lambda)$. إذا تابعنا هذه الطريقة وفرضنا أن كل باق جديد لايساوى الصفر . فإننا نجد على وجه العموم :

$$r_i(\lambda) = q_{i+2}(\lambda)\cdot r_{i+1}(\lambda) + r_{i+2}(\lambda) \qquad \text{(iv)}$$

علاوة على ذلك فإن هذه الطريقة تنتهى بـــ

$$r_{s-2}(\lambda) = q_s(\lambda)\cdot r_{s-1}(\lambda) + r_s(\lambda), \quad r_s(\lambda) \neq 0 \qquad \text{(v)}$$

و

$$r_{s-1}(\lambda) = q_{s+1}(\lambda)\cdot r_s(\lambda) \qquad \text{(vi)}$$

من (vi) نجد أن $r_s(\lambda)$ يقسم $r_{s-1}(\lambda)$ ومن (v) فإنه يقسم أيضاً $r_{s-2}(\lambda)$ ونجد استناداً إلى (iv)

$$r_{s-3}(\lambda) = q_{s-1}(\lambda)\cdot r_{s-2}(\lambda) + r_{s-1}(\lambda)$$

أى أن $r_s(\lambda)$ يقسم $r_{s-3}(\lambda)$. وهكذا باستعادة المراحل المؤدية إلى (vi) ، نستنتج أن $r_s(\lambda)$ يقسم كلا من $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$. إذا كان المعامل المتقدم لـ $r_s(\lambda)$ هو c فإن $d(\lambda) = c^{-1} r_s(\lambda)$

ونستنتج من (i) $r_1(\lambda) = f(\lambda) - q_1(\lambda)\cdot g(\lambda) = h_1(\lambda)\cdot f(\lambda) + k_1(\lambda)\cdot g(\lambda)$ وبالتعويض فى (ii) نجــد :

$$r_2(\lambda) = -q_2(\lambda)\cdot f(\lambda) + [1 + q_1(\lambda)\cdot q_2(\lambda)]g(\lambda) = h_2(\lambda)\cdot f(\lambda) + k_2(\lambda)\cdot g(\lambda)$$

نستنتج من (iii) $r_3(\lambda) = r_1(\lambda) - q_3(\lambda)\cdot r_2(\lambda)$. وإذا عوضنا عن $r_1(\lambda)$ و $r_2(\lambda)$ فإننا نجــد :

$$\begin{aligned} r_3(\lambda) &= [1 + q_2(\lambda)\cdot q_3(\lambda)]f(\lambda) + [-q_1(\lambda) - q_3(\lambda) - q_1(\lambda)\cdot q_2(\lambda)\cdot q_3(\lambda)]g(\lambda) \\ &= h_3(\lambda)\cdot f(\lambda) + k_3(\lambda)\cdot g(\lambda) \end{aligned}$$

وإذا تابعنا فإننا نجــد فى النهاية :

$$r_s(\lambda) = h_s(\lambda)\cdot f(\lambda) + k_s(\lambda)\cdot g(\lambda)$$

أى : $d(\lambda) = c^{-1} r_s(\lambda) = c^{-1} h_s(\lambda)\cdot f(\lambda) + c^{-1} k_s(\lambda)\cdot g(\lambda) = h(\lambda)\cdot f(\lambda) + k(\lambda)\cdot g(\lambda)$ كما هو مطلوب .

يترك برهان أن $d(\lambda)$ وحيد كتمرين .

٣ – أوجد القاسم المشترك الأعظم $d(\lambda)$ لـ :

$$g(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 2 \quad \text{و} \quad f(\lambda) = 3\lambda^5 + 7\lambda^4 + 11\lambda + 6$$

وعبر عن $d(\lambda)$ بالشكل المعطى فى النظرية III .

نجــد على التوالى :

$$f(\lambda) = (3\lambda+1)g(\lambda) + (\lambda^3+4\lambda^2+6\lambda+4) \qquad \text{(i)}$$

$$g(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda^3+4\lambda^2+6\lambda+4) + (\lambda^2+7\lambda+10) \qquad \text{(ii)}$$

$$\lambda^3+4\lambda^2+6\lambda+4 = (\lambda-3)(\lambda^2+7\lambda+10) + (17\lambda+34) \qquad \text{(iii)}$$

و

$$\lambda^2 + 7\lambda + 10 = (\tfrac{1}{17}\lambda + \tfrac{5}{17})(17\lambda+34) \qquad \text{(iv)}$$

ان القاسم المشترك الأعظم هو : $1/_{17}(17\lambda + 34) = \lambda + 2$

نستنتج من (iii) أن

$$17\lambda + 34 = (\lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 4) - (\lambda - 3)(\lambda^2 + 7\lambda + 10)$$

لنعوض عن $\lambda^2+7\lambda+10$ من (ii)

$$17\lambda + 34 = (\lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 4) - (\lambda - 3)[g(\lambda) - (\lambda-2)(\lambda^3+4\lambda^2+6\lambda+4)]$$
$$= (\lambda^2 - 5\lambda + 7)(\lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 4) - (\lambda - 3)g(\lambda)$$

ولنعوض عن $\lambda^3+4\lambda^2+6\lambda+4$ من (i)

$$17\lambda + 34 = (\lambda^2 - 5\lambda + 7)f(\lambda) + (-3\lambda^3 + 14\lambda^2 - 17\lambda - 4)g(\lambda)$$

أي :

$$\lambda + 2 = \frac{1}{17}(\lambda^2 - 5\lambda + 7)\cdot f(\lambda) + \frac{1}{17}(-3\lambda^3 + 14\lambda^2 - 17\lambda - 4)\cdot g(\lambda)$$

٤ – برهن أنه إذا كان القاسم المشترك الأعظم لكثير الحدود $f(\lambda)$ من الدرجة $n > 0$ وكثير الحدود $g(\lambda)$ من الدرجة $m>0$ لايساوى الواحد فإنه يوجد كثيرا حدود لايساويان صفر كثيرات الحدود ، $a(\lambda)$ درجته أقل من m و $b(\lambda)$ درجته أقل من n بحيث يكون :

$$a(\lambda)\cdot f(\lambda) + b(\lambda)\cdot g(\lambda) = 0 \qquad (a)$$

والعكس بالعكس .

لنفرض أن $d(\lambda) \neq 1$ هو القاسم المشترك الأعظم لـ $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ فيكون

$$g(\lambda) = d(\lambda)\cdot g_1(\lambda) \quad و \quad f(\lambda) = d(\lambda)\cdot f_1(\lambda)$$

حيث $f(\lambda)$ من درجة أقل من n و $g(\lambda)$ من درجة أقل من m

الآن .

$$g_1(\lambda)\cdot f(\lambda) = g_1(\lambda)\cdot d(\lambda)\cdot f_1(\lambda) = g(\lambda)\cdot f_1(\lambda)$$

و

$$g_1(\lambda)\cdot f(\lambda) + [-f_1(\lambda)\cdot g(\lambda)] = 0$$

أي إذا أخذنا $a(\lambda) = g_1(\lambda)$ و $b(\lambda) = -f(\lambda)$ فإننا نحصل على (a).

على العكس ، لنفرض أن $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ يكونان أوليين نسبياً وأن (a) صحيحة . ينتج عندئذ عن النظرية IV أنه يوجد كثيرا حدود $h(\lambda)$ و $k(\lambda)$ بحيث يكون :

$$h(\lambda)\cdot f(\lambda) + k(\lambda)\cdot g(\lambda) = 1$$

وهكذا ، باستخدام (a) نستنتج أن :

$$a(\lambda) = a(\lambda)\cdot h(\lambda)\cdot f(\lambda) + a(\lambda)\cdot k(\lambda)\cdot g(\lambda)$$
$$= -b(\lambda)\cdot h(\lambda)\cdot g(\lambda) + a(\lambda)\cdot k(\lambda)\cdot g(\lambda)$$

وأن $g(\lambda)$ يقسم $a(\lambda)$. ولكن هذا الأمر مستحيل . على ذلك إذا كانت العلاقة (a) محققة فإنه لايمكن أن يكون $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ أوليين نسبياً .

٥ – برهن أنه يمكن كتابة كل كثير حدود غير صفرى $f(\lambda)$ من $F[\lambda]$ بالشكل التالي :

$$f(\lambda) = c\cdot q_1(\lambda)\cdot q_2(\lambda) \;\cdots\; q_r(\lambda)$$

حيث $c \neq 0$ ثابت و $q_i(\lambda)$ كثير حدود واحدى غير قابل للاختزال فى $F[\lambda]$

لنكتب :

$$f(\lambda) = a_n\cdot f_1(\lambda) \qquad (i)$$

حيث a_n المعامل المتقدم فى $f(\lambda)$. إذا كان $f_1(\lambda)$ غير قابل للاختزال فإن (i) يحقق شروط هذه النظرية وإذا كان غير ذلك فإنه يوجد تحليل من الشكل :

$$f(\lambda) = a_n \cdot g(\lambda) \cdot h(\lambda) \tag{ii}$$

إذا كان كل من $g(\lambda)$ و $h(\lambda)$ غير قابل للاختزال ، فإن (ii) يحقق شروط النظرية . إذا كان خلاف ذلك فإن تحليلا جديداً يقود إلى مجموعة عوامل واحدية غير قابلة للاختزال .

لبرهان الواحدية نفرض أن :

$$a_n \cdot p_1(\lambda) \cdot p_2(\lambda) \dots p_s(\lambda) \quad , \quad a_n \cdot q_1(\lambda) \cdot q_2(\lambda) \dots q_r(\lambda)$$

تحليلان فيهما $s > r$. بما أن $q_1(\lambda)$ يقسم $p_1(\lambda) \cdot p_2(\lambda) \dots p_s(\lambda)$. فإنه يجب أن يقسم واحداً من $p_i(\lambda)$ الذى . بتغيير الترقيم ، يمكن اعتباره $p_1(\lambda)$. بما أن $p_1(\lambda)$ واحدى وغير قابل للاختزال فإن $q_1(\lambda) = p_1(\lambda)$ وهكذا نجد أن $q_2(\lambda)$ يقسم $p_2(\lambda) \cdot p_3(\lambda) \dots p_s(\lambda)$ ، وبعد أن نكرر ماقلناه سابقاً ، نجد أن $q_2(\lambda) = P_2(\lambda)$ ونجد فى النهاية أن $q_i(\lambda) = p_i(\lambda)$ لقيم $i = 1, 2, \dots, r$ وأن $p_{r+1}(\lambda) \cdot p_{r+2}(\lambda) \dots p_s(\lambda) = 1$. بما أن المساواة الأخيرة مستحيلة فإن $r = s$ وبذلك تكون قد برهنا الوحدانية .

مسائل اضافية

٦ – أعط مثالا تكون فيه درجة $f(\lambda) + g(\lambda)$ أقل من درجة $f(\lambda)$ أو درجة $g(\lambda)$

٧ – برهن النظرية III .

٨ – برهن أنه إذا قسم $f(\lambda)$ كلا من $g(\lambda)$ و $h(\lambda)$ فإنه يقسم $g(\lambda) \pm h(\lambda)$

٩ – أوجد شرطاً لازماً وكافياً لكى يكون كل من كثيرى الحدود غير الصفرين . $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ من $F[\lambda]$ قاسما للآخـــر .

١٠ – عبر لكل مما يلى عن القاسم المشترك الأعظم بالشكل الوارد فى النظرية IV .

(أ) $f(\lambda) = 2\lambda^5 - \lambda^3 + 2\lambda^2 - 6\lambda - 4, \quad g(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda - 2$

(ب) $f(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 - 3\lambda^2 - 11\lambda + 6, \quad g(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 2\lambda - 3$

(جـ) $f(\lambda) = 2\lambda^5 + 5\lambda^4 + 4\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1, \quad g(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 1$

(د) $f(\lambda) = 3\lambda^4 - 4\lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda + 6, \quad g(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2$

الجـــواب :

(أ) $\lambda^2 - 2 = -\frac{1}{3}(\lambda - 1) f(\lambda) + \frac{1}{3}(2\lambda^2 + 1) g(\lambda)$

(ب) $\lambda - 3 = -\frac{1}{13}(\lambda + 4) f(\lambda) + \frac{1}{13}(\lambda^2 + 5\lambda + 5) g(\lambda)$

(جـ) $\lambda + 1 = \frac{1}{13}(\lambda + 4) f(\lambda) + \frac{1}{13}(-2\lambda^3 - 9\lambda^2 - 2\lambda + 9) g(\lambda)$

(د) $1 = \frac{1}{102}(5\lambda + 2) f(\lambda) + \frac{1}{102}(-15\lambda^3 + 44\lambda^2 - 55\lambda + 45) g(\lambda)$

١١ – برهن النظرية VI

إرشاد : افرض $d(\lambda)$ القاسم المشترك الأعظم لـ $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ فيكون $h(\lambda) \cdot g(\lambda) = d(\lambda)$. وينتج عن ذلك أنه إما أن يكون $d(\lambda)$ أو $h(\lambda)$ ثابتاً .

١٢ – برهن النظريتين VII و VIII .

١٣ – برهن إذا كان $f(\lambda)$ أوليا نسبياً مع $g(\lambda)$ ويقسم $\alpha(\lambda)\cdot g(\lambda)$ فإنه يقسم $a(\lambda)$.

١٤ – إن المضاعف المشترك الأصغر لـ $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ هو كثير حدود واحدى ويكون مضاعفاً لكل من $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ وتكون درجته أصغر مايمكن . أوجد القاسم المشترك الأعظم (ق . م . ع .) و المضاعف المشترك الأصغر – (م . م . ص) لكل من :

(ا) $f(\lambda) = \lambda^3 - 1, \quad g(\lambda) = \lambda^4 - 1$

(ب) $f(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+1)^2(\lambda+2), \quad g(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda+2)^3(\lambda-3)$

الجــواب : (ا) ق . م . ع = $\lambda - 1$؛ و م . م . ص = $(\lambda^2-1)(\lambda^2+\lambda+1)$

(ب) ق . م . ع = $(\lambda+1)(\lambda+2)$؛ و م . م . ص = $(\lambda-1)(\lambda+1)^2(\lambda+2)^3(\lambda-3)$

١٥ – ليكن
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$
برهن :

(ا) $\phi(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda - 5$ و $\phi(A) = A^3 - 3A^2 - 9A - 5I = 0$

(ب) $m(A) = 0$ حيث : $m(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 5$.

١٦ – أى خاصة من خواص الحقل ليست محققة من قبل نطاق كثيرات الحدود ؟

١٧ – نقول عن العدد c إنه جذر لكثير الحدود $f(\lambda)$ إذا كان $f(c)=0$ برهن أن العدد c جذر لـ $f(\lambda)$ إذا كان (وإذا كان فقط) ($\lambda-c$) عاملا من عوامل $f(\lambda)$.

١٨ – نفرض أن $f(\lambda) = (\lambda-c)^k g(\lambda)$ (ا) برهن أن c جذر ذو تعدادية ($k-1$) لـ $f'(\lambda)$.
(ب) برهن أن c جذر ذو تعدادية $k>1$ لـ $f(\lambda)$ فيما إذا كان (وإذا كان فقط) c جذراً لكل $f(\lambda)$ و $f'(\lambda)$

١٩ – لنأخذ $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ غير معدومين سويا ، فى $F[\lambda]$ ولنفرض أن قاسمهما المشترك الأعظم $d(\lambda)$. ولنفرض أن K أى حقل يحوى F . برهن أنه إذا كان $D(\lambda)$ القاسم المشترك الأعظم لـ $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ باعتبارهما فى $K[\lambda]$ ، فإن $D[\lambda] = d[\lambda]$.

إرشاد : لنفرض $d(\lambda) = h(\lambda)\cdot f(\lambda) + k(\lambda)\cdot g(\lambda), \; f(\lambda) = s(\lambda)\cdot D(\lambda), \; g(\lambda) = t(\lambda)\cdot D(\lambda).$
و $D(\lambda) = c(\lambda)\cdot d(\lambda).$

٢٠ – برهن أن مصفوفة مربعة A من الدرجة n تكون نظامية إذا كان من الممكن التعبير عن A' ككثير حدود
$$a_s A^s + a_{s-1}A^{s-1} + \dots + a_1 A + a_0 I$$
فى A .

الفصل الثالث والعشرون

المصفوفات لا مبدا

تعـــاريف :

ليكن $F[\lambda]$ نطاق كثيرات الحدود المكونة من كل كثيرات الحدود فى λ ذات المعاملات المنتمية إلى F . تسمى المصفوفة التغير صفرية ذات الدرجة $m \times n$ والمعرفة على F .

$$A(\lambda) = [a_{ij}(\lambda)] = \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \dots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \dots & a_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}(\lambda) & a_{m2}(\lambda) & \dots & a_{mn}(\lambda) \end{bmatrix} \qquad (23.1)$$

مصفوفة لا مبدا (مصفوفة λ) .

لتكن p أعلى درجة لـ λ فى كثيرات الحدود $a_{ij}(\lambda)$ الواردة فى (23.1) يمكن كتابة $A(\lambda)$ ككثير حدود من الدرجة p بالنسبة لـ λ معاملاته مصفوفات نسميه كثير حدود مصفوفى .

$$A(\lambda) = A_p \lambda^p + A_{p-1} \lambda^{p-1} + \dots + A_1 \lambda + A_0 \qquad (23.2)$$

حيث A_i مصفوفة معرفة على F من الدرجة $m \times n$

مثال ١ : إن :

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 + \lambda + 1 & \lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 5 \\ \lambda^3 - 4 & \lambda^3 - 3\lambda^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda^4 + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \lambda^3 + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

مصفوفة λ أو كثير حدود مصفوفى من الدرجة الرابعة

إذا كانت $A(\lambda)$ مصفوفة مربعة من الدرجة n . فإنها توصف بأنها شاذة أوغير شاذة حسبما يكون $|A(\lambda)|$ مساويا أو غير مساو للصفر . وتوصف $A(\lambda)$ فوق ذلك بأنها غير معتلة أو معتلة حسبما يكون A_p غير شاذة أو شاذة . إن كثير الحدود الوارد فى المثال ١ ، غير شاذ ومعتل .

العمليات على مصفوفات لا مبدا :

لتكن مصفوفتا لا مبدأ المربعتان ومن الدرجة n أو كثيرا الحدود المصفوفتين على $F(\lambda)$:

$$A(\lambda) = A_p \lambda^p + A_{p-1} \lambda^{p-1} + \dots + A_1 \lambda + A_0 \qquad (23.3)$$

و

$$B(\lambda) = B_q \lambda^q + B_{q-1} \lambda^{q-1} + \dots + B_1 \lambda + B_0 \qquad (23.4)$$

نقول عن المصفوفتين (23.3)و(23.4)إنهما متساويتان ، $A(\lambda)=B(\lambda)$ على شرط $p=q$ و $A_i=B_i$ لقيم $(i=0,1,2,\dots p)$.

إن المجموع $A(\lambda) + B(\lambda)$ هو مصفوفة لا مبدا $C(\lambda)$ تنتج من جمع كل عنصرين متناظرين من مصفوفتى λ المفروضتين .

إن حاصل الضرب $B(\lambda).A(\lambda)$ هو مصفوفة لامبدا أو كثير حدود مصفوفى لا تزيد درجته عن $p+q$.
إذا كان أى من $A(\lambda)$ أو $B(\lambda)$ غير شاذ فإن درجة $A(\lambda).B(\lambda)$ و $B(\lambda).A(\lambda)$ تساوى $p+q$ بالضبط .

لا تتغير المساواة (23.3) عندما نستعيض عن λ بعدد آخر k من F .

فلو فرضنا مثلا $\lambda = k$ فى (23.3) فإننا نجـد :

$$A(k) = A_p k^p + A_{p-1} k^{p-1} + \ldots + A_1 k + A_0$$

ولكننا ، لو أحللنا λ بمصفوفة C مربعة من الدرجة n فإنه من الممكن أن نحصل على نتيجتين مختلفتين ويرجع ذلك لأنه ، فى الحالة العامة ، لا تكون مصفوفتين مربعتين تبديليتين . تسمى بالتعريف .

$$A_R(C) = A_p C^p + A_{p-1} C^{p-1} + \ldots + A_1 C + A_0 \tag{23.5}$$

و

$$A_L(C) = C^p A_p + C^{p-1} A_{p-1} + \ldots + CA_1 + A_0 \tag{23.6}$$

وعلى الترتيب القيمة الدالية اليمنى والقيمة الدالية اليسرى لـ $A(\lambda)$.

مثال ٢ : لنفرض $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda+1 \\ \lambda-2 & \lambda^2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

فيكـون

$$A_R(C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 14 & 26 \end{bmatrix}$$

و

$$A_L(C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 17 & 27 \end{bmatrix}$$

أنظر المسألة ١

القسمة : سنبرهن فى المسألة ٢ :

I. إذا كان $A(\lambda)$ و $B(\lambda)$ كثيرا الحدود المعرفين فى (23.3) و (23.4) وإذا كانت B_q مصفوفة غير شاذة ، فإنه يوجد بشكل وحيد أربع كثيرات حدود مصفوفية $R_2(\lambda)$ ، $Q_2(\lambda)$ ؛ $R_1(\lambda)$ ، $Q_1(\lambda)$ بحيث يكون كل من $R_1(\lambda)$ و $R_2(\lambda)$ إما صفرا أو من درجة أقل من درجة $B(\lambda)$ وبحيث يتحقق ما يلى :

$$A(\lambda) = Q_1(\lambda)\cdot B(\lambda) + R_1(\lambda) \tag{23,7}$$

و

$$A(\lambda) = B(\lambda)\cdot Q_2(\lambda) + R_2(\lambda) \tag{23.8}$$

إذا كان $R_1(\lambda) = 0$ فإن $B(\lambda)$ يدعى قاسما من اليمين لـ $A(\lambda)$ وإذا كان $A_2(\lambda) = 0$ فان $B(\lambda)$ يدعى قاسما من اليساو لـ $A(\lambda)$

مثال ٣ : إذا كان $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^4+\lambda^2+\lambda-1 & \lambda^3+\lambda^2+\lambda+2 \\ 2\lambda^3-\lambda & 2\lambda^2+2\lambda \end{bmatrix}$ و $B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2+1 & 1 \\ \lambda & \lambda^2+\lambda \end{bmatrix}$

فـإن

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2-1 & \lambda-1 \\ 2\lambda & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda^2+1 & 1 \\ \lambda & \lambda^2+\lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\lambda & 2\lambda+3 \\ -5\lambda & -2\lambda \end{bmatrix} = Q_1(\lambda)\cdot B(\lambda) + R_1(\lambda)$$

و

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2+1 & 1 \\ \lambda & \lambda^2+\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda+1 \\ \lambda-1 & 1 \end{bmatrix} = B(\lambda)\cdot Q_2(\lambda)$$

ويكون هنا $B(\lambda)$ قاسما من اليسار لـ $A(\lambda)$

أنظر المسألة ٣

يسمى كثير الحدود المصفوفى ذا الشكل :

$$B(\lambda) = b_q\lambda^q \cdot I_n + b_{q-1}\lambda^{q-1} \cdot I_n + \ldots + b_1\lambda \cdot I_n + b_0 I_n = b(\lambda) \cdot I_n \qquad (23.9)$$

بأنه عددى . إن كثير الحدود المصفوفى العددى $B(\lambda) = b(\lambda) . I_n$ تبديل مع كل كثير حدود مصفوف مربع من الدرجة n .

فى (23.7) و (23.8) إذا كان $B(\lambda) = b(\lambda) . I$ فإن :

$$A(\lambda) = Q_1(\lambda) \cdot B(\lambda) + R_1(\lambda) = B(\lambda) \cdot Q_1(\lambda) + R_1(\lambda) \qquad (23.10)$$

مثال ٤ :

لنفترض أن $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2+2\lambda & \lambda+1 \\ \lambda^2-1 & 2\lambda+1 \end{bmatrix}$ و $B(\lambda) = (\lambda+2)I_2$. فيكون :

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ \lambda-2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda+2 & 0 \\ 0 & \lambda+2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = Q_1(\lambda) \cdot B(\lambda) + R_1(\lambda)$$

و

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda+2 & 0 \\ 0 & \lambda+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ \lambda-2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = B(\lambda) \cdot Q_1(\lambda) + R_1(\lambda)$$

إذا كان $R_1(\lambda) = 0$ فى (23.10) فإن $A(\lambda) = b(\lambda) \cdot I \cdot Q_1(\lambda)$ ويكون لدينا :

II. يقبل كثير حدود مصفوفى $A(\lambda) = [a_{ij}(\lambda)]$ من الدرجة n القسمة على كثير حدود مصفوفى عددى $B(\lambda) = b(\lambda) \cdot I_n$ إذا كان (وإذا فقط) كل واحد من $a_{ij}(\lambda)$ يقبل القسمة على $b(\lambda)$

نظرية البـــاقى :

لتكن $A(\lambda)$ مصفوفة λ الواردة فى (23-3) ولنفرض أن $B = [b_{ij}]$ مصفوفة مربعة من الدرجة n معرفة على F . بما أن $\lambda I - B$ غير شاذة فإنه يمكننا أن نكتب :

$$A(\lambda) = Q_1(\lambda) \cdot (\lambda I - B) + R_1 \qquad (23.11)$$

و

$$A(\lambda) = (\lambda I - B) \cdot Q_2(\lambda) + R_2 \qquad (23.12)$$

حيث R_1 و R_2 خاليا من λ يمكن أن نبين :

III. إذا قسم كثير الحدود المصفوفى $A(\lambda)$ الوارد فى (23.3) على $\lambda I - B$ حيث $B = [b_{ij}]$ مصفوفة مربعة من الدرجة n ، حتى نحصل على الباقيين R_1 و R_2 الخاليتين من λ ، فإنه يكون :

$$R_1 = A_R(B) = A_p B^p + A_{p-1} B^{p-1} + \ldots + A_1 B + A_0$$

و

$$R_2 = A_L(B) = B^p A_p + B^{p-1} A_{p-1} + \ldots + BA_1 + A_0$$

مثال ٥ :

لنفرض $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda+1 \\ \lambda-2 & \lambda^2+2 \end{bmatrix}$ ، $\lambda I - B = \begin{bmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -3 & \lambda-4 \end{bmatrix}$ فيكــون :

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda+1 & 3 \\ 4 & \lambda+4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -3 & \lambda-4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 14 & 26 \end{bmatrix} = Q_1(\lambda)\cdot(\lambda I - B) + R_1$$

و

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -3 & \lambda-4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda+1 & 3 \\ 4 & \lambda+4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 17 & 27 \end{bmatrix} = (\lambda I - B)Q_2(\lambda) + R_2$$

من المثال ٢ نجد أن $R_1 = A_R(B)$ و $R_2 = A_L(B)$ وذلك متفق مع النظرية III .

إذا كان $A(\lambda)$ كثير حدود مصفوفى عددى

$$A(\lambda) = f(\lambda)\cdot I = a_p I\lambda^p + a_{p-1}I\lambda^{p-1} + \ldots + a_1 I\lambda + a_0 I$$

فإن الباقيين الواردين فى (23.11) و (23.12) يكونان متطابقتين أى :

$$R_1 = R_2 = a_p B^p + a_{p-1}B^{p-1} + \ldots + a_1 B + a_0 I$$

ونجــد :

IV. إذا قسم كثير حدود مصفوفى عددى $f(\lambda).I_n$ على $\lambda I_n - B$ حتى نحصل على باقى القسمة R خاليا من λ فإنه يكون $R = f(B)$

كنتيجة لما تقدم نجــد :

V. يقبل كثير حدود مصفوفى عددى $f(\lambda).I_n$ القسمة على $\lambda I_n - B$ إذا كان (وإذا كان فقط) $f(B) = 0$

نظرية كايلى ــ هاميلتون :

اعتبر المصفوفة المربعة $A = [a_{ij}]$ ذات الدرجة n . التى تكون $\lambda I - A$ مصفوفته المميزة و $\varphi(\lambda) = |\lambda I - A| = 0$ معادلته المميزة . نستنتج من (6.2) أن

$$(\lambda I - A)\cdot \text{adj}(\lambda I - A) = \phi(\lambda)\cdot I$$

وهكذا نجد أن $\phi(\lambda).I$ قابل القسمة على $\lambda I - A$ ونستنتج من النظرية V . أن $\phi(A) = 0$ أى :

VI. كل مصفوفة مربعة $A = [a_{ij}]$ تحقق معادلتها المميزة $\varphi(\lambda) = 0$

مثال ٦ :

إن المعادلة المميزة لـ $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ هى $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = 0.$ الآن

$$A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 12 & 6 \\ 6 & 13 & 6 \\ 6 & 12 & 7 \end{bmatrix} \qquad A^3 = \begin{bmatrix} 32 & 62 & 31 \\ 31 & 63 & 31 \\ 31 & 62 & 32 \end{bmatrix}$$

و

$$\begin{bmatrix} 32 & 62 & 31 \\ 31 & 63 & 31 \\ 31 & 62 & 32 \end{bmatrix} - 7\begin{bmatrix} 7 & 12 & 6 \\ 6 & 13 & 6 \\ 6 & 12 & 7 \end{bmatrix} + 11\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

أنظر المسألة ٤

مسائل اضافية

١ – المصفوفة $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2+\lambda & \lambda^2 \\ \lambda+1 & 1 \end{bmatrix}$ احسب $A_R(C)$ و $A_L(C)$ عندما يكون $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

أن $A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، $C^2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ و نجـد :

$$A_R(C) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

و

$$A_L(C) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

٢ – برهن أنه إذا كانت $A(\lambda)$ و $B(\lambda)$ مصفوفتى لا مبدا الواردتين فى (23.4) و (32.3) وإذا كانت B_q مصفوفة غير شاذة فإنه يوجد أربع كثيرات حدود مصفوفية وحيـدة : $Q_1(\lambda), R_1(\lambda)$ ؛ $Q_2(\lambda)$ و $R_2(\lambda)$ حيث كل من $R_1(\lambda)$ و $R_2(\lambda)$ إما أن يكون صفرا أو من درجة أقل من درجة $B(\lambda)$ وبحيث يكون :

$$A(\lambda) = Q_1(\lambda)\cdot B(\lambda) + R_1(\lambda) \qquad \text{(i)}$$

و

$$A(\lambda) = B(\lambda)\cdot Q_2(\lambda) + R_2(\lambda) \qquad \text{(ii)}$$

إذا كان $q>p$ فإن (i) تتحقق لـ $Q_1(\lambda)=0$ و $R_1(\lambda)=A(\lambda)$ لنفرض أن $q\leq p$ فيكـون :

$$A(\lambda) - A_p B_q^{-1} B(\lambda)\lambda^{p-q} = C(\lambda)$$

حيث $C(\lambda)$ إما أن يساوى الصفر أو أن يكون من درجة لا تزيد عن $P-1$.

إذا كان $C(\lambda)$ صفرا أو من درجة تقل عن q فإننا نجـد (i) مع

$$R_1(\lambda) = C(\lambda) \quad \text{و} \quad Q_1(\lambda) = A_p B_q^{-1}\lambda^{p-q}$$

إذا كان $C(\lambda) = C_S\lambda^S + \ldots$ حيث $q<s$ لنكون :

$$A(\lambda) - A_p B_q^{-1} B(\lambda)\lambda^{p-q} - C_s B_q^{-1} B(\lambda)\lambda^{s-q} = D(\lambda)$$

إذا كان $D(\lambda)$ إما صفرا أو من درجة أقل من q فإننا نجـد (i) مع

$$R_1(\lambda) = D(\lambda) \quad , \quad Q_1(\lambda) = A_p B_q^{-1}\lambda^{p-q} + C_s B_q^{-1}\lambda^{s-q}$$

أما خلاف هذا ، فإننا نتابع هذا العملية . بما أن هذا سيؤدى إلى متوالية من كثيرات الحدود المصفوفية متناقصة الدرجة $C(\lambda), D(\lambda) \ldots$ فإننا سنحصل فى النهاية إلى كثير حدود مصفوفى إما أن يكون معدوماً أو من درجة أدنى من q ونحصل على (i)

لكى نحصل على (ii) نبدأ من :

$$A(\lambda) - B(\lambda) B_q^{-1} A_p \lambda^{p-q}$$

نترك إتمام البرهان وإثبات الوحدانية كتمرين للقارىء .

أنظر المسألة ١ من الفصل ٢٢

٣ - إذا أعطيت $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^4 + 2\lambda^3 - 1 & \lambda^3 - \lambda - 1 \\ \lambda^3 + \lambda^2 + 1 & \lambda^3 + 1 \end{bmatrix}$ و $B(\lambda) = \begin{bmatrix} 2\lambda^2 - \lambda & -\lambda^2 + \lambda - 1 \\ -\lambda^2 + 2 & \lambda^2 - \lambda \end{bmatrix}$

أوجـد المصفوفات $Q_1(\lambda), R_1(\lambda);\ Q_2(\lambda), R_2(\lambda),$

بحيث يكون (أ) $A(\lambda) = Q_1(\lambda)\cdot B(\lambda) + R_1(\lambda),$ (ب) $A(\lambda) = B(\lambda)\cdot Q_2(\lambda) + R_2(\lambda)$

كما في المسألة ٢ .

لدينـا :

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda^4 + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\lambda^3 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B(\lambda) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

هنا $B_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$

(أ) لنحسب ما يلي :

$$A(\lambda) - A_4 B_2^{-1} B(\lambda)\lambda^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\lambda^3 + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = C(\lambda)$$

و

$$C(\lambda) - C_3 B_2^{-1} B(\lambda)\lambda = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} -10 & 3 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = D(\lambda)$$

$$D(\lambda) - D_2 B_2^{-1} B(\lambda) = \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} -13 & 3 \\ -9 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6\lambda - 13 & 5\lambda + 3 \\ -2\lambda - 9 & 3\lambda + 5 \end{bmatrix} = R_1(\lambda)$$

فنجـد :

$$Q_1(\lambda) = (A_4\lambda^2 + C_3\lambda + D_2)B_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^2 + 4\lambda + 4 & \lambda^2 + 5\lambda + 6 \\ 2\lambda + 4 & 3\lambda + 5 \end{bmatrix}$$

(ب) لنحسب ما يلي :

$$A(\lambda) - B(\lambda)B_2^{-1}A_4\lambda^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\lambda^3 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = E(\lambda)$$

$$E(\lambda) - B(\lambda)B_2^{-1}E_3\lambda = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = F(\lambda)$$

و

$$F(\lambda) - B(\lambda)B_2^{-1}F_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -7 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 8 & -\lambda + 4 \\ \lambda - 7 & \lambda - 3 \end{bmatrix} = R_2(\lambda)$$

فنجـد :

$$Q_2(\lambda) = B_2^{-1}(A_4\lambda^2 + E_3\lambda + F_2) = \begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix}4&2\\6&3\end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix}4&2\\9&5\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\lambda^2+4\lambda+4 & 2\lambda+2\\ \lambda^2+6\lambda+9 & 3\lambda+5\end{bmatrix}$$

٤ – إذا أعطيت $A = \begin{bmatrix}1&1&2\\3&1&1\\2&3&1\end{bmatrix}$ استخدم حقيقة أن A تحقق معادلتها المميزة لحساب A^3 ، A^4 وكذلك بما أن A غير شاذة لحساب A^{-1} و A^{-2}

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -2\\ -3 & \lambda-1 & -1\\ -2 & -3 & \lambda-1\end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 7\lambda - 11 = 0$$

وهكذا نجـد :

$$A^3 = 3A^2 + 7A + 11I = 3\begin{bmatrix}8&8&5\\8&7&8\\13&8&8\end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix}1&1&2\\3&1&1\\2&3&1\end{bmatrix} + 11\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}42&31&29\\45&39&31\\53&45&42\end{bmatrix}$$

$$A^4 = 3A^3 + 7A^2 + 11A = 3\begin{bmatrix}42&31&29\\45&39&31\\53&45&42\end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix}8&8&5\\8&7&8\\13&8&8\end{bmatrix} + 11\begin{bmatrix}1&1&2\\3&1&1\\2&3&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}193&160&144\\224&177&160\\272&224&193\end{bmatrix}$$

ومن $11I = -7A - 3A^2 + A^3$ فـإن :

$$A^{-1} = \frac{1}{11}\{-7I - 3A + A^2\} = \frac{1}{11}\left\{-7\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}1&1&2\\3&1&1\\2&3&1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}8&8&5\\8&7&8\\13&8&8\end{bmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{11}\begin{bmatrix}-2&5&-1\\-1&-3&5\\7&-1&-2\end{bmatrix}$$

$$A^{-2} = \frac{1}{11}\{-7A^{-1} - 3I + A\} = \frac{1}{121}\left\{-7\begin{bmatrix}-2&5&-1\\-1&-3&5\\7&-1&-2\end{bmatrix} - 33\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} + 11\begin{bmatrix}1&1&2\\3&1&1\\2&3&1\end{bmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{121}\begin{bmatrix}-8&-24&29\\40&-1&-24\\-27&40&-8\end{bmatrix}$$

٥ – لتكن $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ القيم الخاصة لمصفوفة مربعة A من الدرجة n وأن $h(x)$ كثير حدود في x من الدرجة p .
برهن أن $|h(A)| = h(\lambda_1)\cdot h(\lambda_2)\ldots h(\lambda_n)$.

إن لدينـا :

$$|\lambda I - A| = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_n) \quad \text{(i)}$$

لنفـرض

$$h(x) = c(s_1 - x)(s_2 - x)\ldots(s_p - x) \quad \text{(ii)}$$

فنجـد :

$$h(A) = c(s_1 I - A)(s_2 I - A)\ldots(s_p I - A)$$

$$\begin{aligned}
|h(A)| &= c^p |s_1 I - A| \cdot |s_2 I - A| \ldots |s_p I - A| \\
&= \{c(s_1-\lambda_1)(s_1-\lambda_2)\ldots(s_1-\lambda_n)\} \\
&\quad \cdot \{c(s_2-\lambda_1)(s_2-\lambda_2)\ldots(s_2-\lambda_n)\} \ldots \{c(s_p-\lambda_1)(s_p-\lambda_2)\ldots(s_p-\lambda_n)\} \\
&= \{c(s_1-\lambda_1)(s_2-\lambda_1)\ldots(s_p-\lambda_1)\} \\
&\quad \cdot \{c(s_1-\lambda_2)(s_2-\lambda_2)\ldots(s_p-\lambda_2)\} \ldots \{c(s_1-\lambda_n)(s_2-\lambda_n)\ldots(s_p-\lambda_n)\} \\
&= h(\lambda_1)\, h(\lambda_2) \ldots h(\lambda_n)
\end{aligned}$$

و

وذلك باستخدام (ii)

مســـــائل اضـــافية

٦ – إذا أعطيت $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2+2\lambda & \lambda \\ \lambda^2+1 & \lambda-1 \end{bmatrix}$ ، $B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda^2+\lambda \\ \lambda+1 & \lambda \end{bmatrix}$. فاحسب :

(أ) $A(\lambda) + B(\lambda) = \begin{bmatrix} 2\lambda^2+2\lambda & \lambda^2+2\lambda \\ \lambda^2+\lambda+2 & 2\lambda-1 \end{bmatrix}$

(ب) $A(\lambda) - B(\lambda) = \begin{bmatrix} 2\lambda & -\lambda^2 \\ \lambda^2-\lambda & -1 \end{bmatrix}$

(جـ) $A(\lambda)\cdot B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^4+2\lambda^3+\lambda^2+\lambda & \lambda^4+3\lambda^3+3\lambda^2 \\ \lambda^4+2\lambda^2-1 & \lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2 \end{bmatrix}$

(د) $B(\lambda)\cdot A(\lambda) = \begin{bmatrix} 2\lambda^4+3\lambda^3+\lambda^2+\lambda & 2\lambda^3-\lambda \\ 2\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda & 2\lambda^2 \end{bmatrix}$

٧ – إذا أعطيت $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2+1 & \lambda^2 \\ \lambda+2 & \lambda-1 \end{bmatrix}$ ، $B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ -\lambda^2 & 1 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. فاحسب :

$A_R(C) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ ، $B_R(C) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ، $A_R(C)\cdot B_R(C) = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 17 & -7 \end{bmatrix}$ ، $B_R(C)\cdot A_R(C) = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$

$P_R(C) = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$ ، $Q_R(C) = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$

$A_L(C) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ، $B_L(C) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ ، $A_L(C)\cdot B_L(C) = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ ، $B_L(C)\cdot A_L(C) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}$

$P_L(C) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ، $Q_L(C) = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$

حيث $P(\lambda) = A(\lambda)\cdot B(\lambda)$ و $Q(\lambda) = B(\lambda)\cdot A(\lambda)$.

٨ – إذا كانت $A(\lambda)$ و $B(\lambda)$ مصفوفتي لا مبدا مربعتين من درجة n غير معتلتين ولنفرض أنهما على الترتيب من الدرجة p و q . وإذا كانت $C(\lambda)$ أي مصفوفة لا مبدا غير صفرية فبرهن أن درجة مصفوفـة حاصل ضرب هذه المصفوفات الثلاث بأي ترتيب لا تقل عن $p+q$.

٩ – لكل زوج من المصفوفات $A(\lambda)$ و $B(\lambda)$ الواردة أدناه ، أوجد المصفوفات $Q_1(\lambda), R_1(\lambda); Q_2(\lambda), R_2(\lambda)$ المحققة للعلاقتين (23.7) و (23.8)

(أ)
$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 + 2\lambda & \lambda \\ \lambda^2 + 1 & \lambda^2 - \lambda \end{bmatrix} \qquad B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

(ب)
$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda^2 + \lambda & -\lambda^2 + 2\lambda + 2 \\ -\lambda^2 + 2\lambda - 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 \end{bmatrix}$$

(جـ)
$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^3 - 2\lambda + 1 & \lambda^4 + \lambda^2 + 7\lambda - 2 & 5\lambda^2 + 2\lambda + 4 \\ \lambda^4 + 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 & 3\lambda^3 + 2\lambda + 2 & 4\lambda^2 + 6\lambda + 1 \\ 2\lambda^3 - \lambda + 2 & \lambda^3 + 2\lambda^2 & \lambda^3 + \lambda^2 + 8\lambda - 4 \end{bmatrix}$$

$$B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 + 1 & 1 & 3\lambda - 1 \\ 2\lambda & \lambda^2 & \lambda + 1 \\ \lambda - 2 & 2\lambda & \lambda^2 \end{bmatrix}$$

(د)
$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} 3\lambda^4 + \lambda^2 - 1 & \lambda^3 - 1 & \lambda^2 - \lambda \\ \lambda^3 - \lambda^2 + 1 & \lambda^4 + \lambda^2 + 2 & \lambda - 1 \\ \lambda^2 + \lambda & \lambda + 1 & 2\lambda^4 + \lambda - 2 \end{bmatrix} \qquad B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 - 2\lambda - 1 & \lambda^2 + 1 & \lambda + 1 \\ \lambda + 1 & \lambda^2 + \lambda & \lambda^2 - 2\lambda \\ \lambda & \lambda - 2 & \lambda^2 + \lambda - 1 \end{bmatrix}$$

الجـــواب :

(أ)
$$(a) \quad Q_1(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda + 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{bmatrix} \quad R_1(\lambda) = 0; \quad Q_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 2\lambda & \lambda - 1 \\ -\lambda + 2 & -\lambda + 2 \end{bmatrix} \quad R_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(ب)
$$(b) \quad Q_1(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda & -\lambda - 1 \\ -\lambda + 1 & -1 \end{bmatrix} \quad R_1(\lambda) = 0; \quad Q_2(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda - 1 & -\lambda + 1 \\ -\lambda & 0 \end{bmatrix} \quad R_2(\lambda) = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(جـ)
$$(c) \quad Q_1(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda + 1 & \lambda^2 + 3 & -\lambda + 7 \\ \lambda^2 - 1 & 3\lambda + 5 & -3\lambda + 2 \\ 2\lambda - 3 & \lambda & \lambda - 6 \end{bmatrix} \qquad R_1(\lambda) = \begin{bmatrix} -16\lambda + 14 & -6\lambda - 3 & -5\lambda + 2 \\ -21\lambda + 4 & -2\lambda + 3 & \lambda - 5 \\ 5\lambda - 7 & 10\lambda + 3 & 18\lambda - 7 \end{bmatrix}$$

$$Q_2(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & \lambda^2 & 2 \\ \lambda^2 + 1 & \lambda & 3 \\ -1 & 2 & \lambda + 1 \end{bmatrix} \qquad R_2(\lambda) = 0$$

(د)
$$(d) \quad Q_1(\lambda) = \begin{bmatrix} 3\lambda^2 + 6\lambda + 31 & -3\lambda^2 - 5\lambda - 16 & 3\lambda^2 - 7\lambda + 8 \\ \lambda - 3 & \lambda^2 - \lambda - 1 & -\lambda^2 + 4\lambda - 7 \\ -2\lambda - 1 & 7 & 2\lambda^2 - 2\lambda - 1 \end{bmatrix}$$

$$R_1(\lambda) = \begin{bmatrix} 81\lambda + 46 & -12\lambda - 16 & -85\lambda - 23 \\ 4\lambda - 1 & 15\lambda - 9 & 12\lambda - 5 \\ -9\lambda - 8 & -7\lambda & 17\lambda - 2 \end{bmatrix}$$

$$Q_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 3\lambda^2 + 5\lambda + 31 & -\lambda^2 - \lambda - 4 & 2\lambda^2 - 4\lambda + 3 \\ \lambda - 14 & \lambda^2 & -2\lambda^2 + 6\lambda - 6 \\ -3\lambda - 2 & 3 & 2\lambda^2 - 2\lambda - 2 \end{bmatrix}$$

$$R_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 71\lambda + 46 & -12\lambda - 8 & -\lambda + 11 \\ -26\lambda - 30 & 11\lambda + 6 & 4\lambda - 4 \\ -15\lambda - 30 & 2\lambda + 4 & 16\lambda - 16 \end{bmatrix}$$

١٠ – تحقق فى (ب) من المسألة ٩ أن $R_1(\lambda) = A_R(C)$ و $R_2(\lambda) = A_L(C)$ حيث $B(\lambda) = \lambda I - C$

١١ – إذا كان $B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2+1 & 3\lambda+1 \\ \lambda-2 & \lambda^2-3\lambda+2 \end{bmatrix}$ ، $C(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda+2 & \lambda \\ \lambda-3 & \lambda+1 \end{bmatrix}$

(ا) احسب : $A(\lambda) = B(\lambda)\cdot C(\lambda)$

(ب) أوجد $Q(\lambda)$ و $R(\lambda)$ من درجة لا تزيد على الواحد بحيث يكون $A(\lambda) = Q(\lambda)\cdot B(\lambda) + R(\lambda)$.

الجواب : $\begin{bmatrix} \lambda^3+5\lambda^2-7\lambda-1 & \lambda^3+3\lambda^2+5\lambda+1 \\ \lambda^3-5\lambda^2+11\lambda-10 & \lambda^3-\lambda^2-3\lambda+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+4 & \lambda+3 \\ \lambda-6 & \lambda-1 \end{bmatrix} B(\lambda) + \begin{bmatrix} -9\lambda+1 & -\lambda-9 \\ 13\lambda-6 & 9\lambda+10 \end{bmatrix}$

١٢ – إذا علمت $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، فاحسب كما فى المسألة ٤ :

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, \quad A^4 = \begin{bmatrix} 17 & 24 \\ 12 & 17 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A^{-2} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^{-3} = \begin{bmatrix} -7 & 10 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$$

١٣ – برهن أنه إذا كانت A و B مصفوفتين متشابهتين وكان $g(\lambda)$ أى كثير حدود عددى فإن $g(A)$ و $g(B)$ يكونان متشابهين .

إرشاد : برهن أولا أن A^k و B^k متشابهتان لأى عدد صحيح موجب k .

١٤ – برهن أنه إذا كان $B = \text{diag}(B_1, B_2, \ldots, B_m)$ وكان $g(\lambda)$ أى كثير حدود عددى فإن

$$g(B) = \text{diag}\left(g(B_1), g(B_2), \ldots, g(B_m)\right)$$

١٥ – برهن النظرية III .

إرشاد : حقق أن $\lambda I - B$ يقسم $A(\lambda) - A_R(B)$

١٦ – نقول عن المصفوفة C إنها جذر لكثير الحدود المصفوفى العددى $B(\lambda)$ الوارد فى (23.9) فيما إذا كان $B(C) = 0$. برهن أن المصفوفة C تكون جذراً لـ $B(\lambda)$ فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) المصفوفة المميزة لـ C تقسم $B(\lambda)$.

١٧ – برهن أنه إذا كانت $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ القيم الخاصة لـ A وإذا كان $F(A)$ أى كثير حدود عددى فى A ، فإن القيم الخاصة لـ $f(A)$ هى $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n)$.

إرشاد : اكتب : $\lambda - f(x) = c(x_1 - x)(x_2 - x)\ldots(x_s - x)$ بحيث يكون

$$|\lambda I - f(A)| = c^n |x_1 I - A| \cdot |x_2 I - A| \ldots |x_s I - A|.$$

الآن استعمل العلاقتين $|x_i I - A| = (x_i - \lambda_1)(x_i - \lambda_2)\ldots(x_i - \lambda_n)$

و $c(x_1 - \lambda_j)(x_2 - \lambda_j)\ldots(x_s - \lambda_j) = \lambda - f(\lambda_j)$.

١٨ – أوجد القيم الخاصة لـ $f(A) = A^2 - 2A + 3$, إذا علمت أن $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

١٩ – أوجد النظرية الخاصة بالمسألة ٥ كنتيجة طبيعية للمسألة ١٧ .

٢٠ - برهن أنه إذا كان X متجها لا متغيرا لمصفوفة المسألة ١٧ A ، فإن X يكون متجها لا متغيرا لـ $f(A)$.

٢١ - لنفرض $A(t) = [a_{ij}(t)]$ حيث $a_{ij}(t)$ كثير حدود حقيقى للمتغير الحقيقى t . خذ :

$$A(t) = \begin{bmatrix} t^2+t+1 & t^4+2t^3+3t^2+5 \\ t^3-4 & t^3-3t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t^4 + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} t^3 + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} t^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

وفاضل الطرف الأخير كما لو كان كثير حدود معاملاته ثابتة لاقتراح التعريف :

$$\frac{d}{dt}A(t) = \left[\frac{d}{dt}a_{ij}(t)\right]$$

٢٢ - أوجد صيغا لكل من

(ا) $\frac{d}{dt}\{A(t)+B(t)\}$; (ب) $\frac{d}{dt}\{cA(t)\}$ ، حيث c عدد ثابت أو $C=[c_{ij}]$

(جـ) $\frac{d}{dt}\{A(t)\cdot B(t)\}$; (د) $\frac{d}{dt}A^{-1}(t)$.

إرشاد : فى حالة (جـ) اكتب $A(t)\cdot B(t) = C(t) = [c_{ij}(t)]$

ثم فاضل $c_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)\, b_{kj}(t)$. فى حالة (د) استعمل العلاقة $A(t)\cdot A^{-1}(t) = I$.

الفصل الرابع والعشرون

شكل سميث النظامى

بالتحويلات الأوليـــة :

على المصفوفة لامبدا $A(\lambda)$ على $F[\lambda]$ فإننا نعنى :

(١) المبادلة بين الصفين ذوى الرقين i و j ونرمز لذلك بالرمز H_{ij} ؛ المبادلة بين العمودين ذوى الرقين i و j ونرمز له بالرمز K_{ij} .

(٢) ضرب الصف ذى الرقم i بثابت غير صفرى k ونرمز لذلك بالرمز $H_i(k)$ ضرب العمود ذى الرقم i بثابت غير صفرى k ونرمز له بالشكل $K_i(k)$.

(٣) إضافة حاصل ضرب كثير حدود $f(\lambda)$ من $F[\lambda]$ مع الصف رقم j الصف رقم i ونرمز لذلك بالرمز $H_{ij}(f(\lambda))$.

إضافة حاصل ضرب العمود رقم j و $f(\lambda)$ إلى العمود رقم i ويرمز لذلك بالرمز $K_{ij}(f(\lambda))$.

إن هذه التحويلات هى التحويلات الأولية الواردة فى الفصل الخامس عدا التحويل (٣) حيث كلمة عددى قد تغيرت وأصبحت كثير حدود . سنرمز للتحويل الأولى والمصفوفة الأولية التى نحصل عليها نتيجة لإجراء هذا التحويل الأولى على I بنفس الرمز . وهكذا فإنه يمكن إجراء تحويل صفوف على $A(\lambda)$ بضربه من اليسار بمصفوفة مناسبة H كما أنه يمكن إجراء تحويل أعمدة على $A(\lambda)$ بضربه من اليمين بمصفوفة مناسبة K .

تمشيا مع الفصل الخامس نجد :

I. أن لكل مصفوفة أولية من $F[\lambda]$ معكوساً هو أيضا مصفوفة أولية من $F[\lambda]$

II. إذا كان $|A(\lambda)| = k \neq 0$ حيث k من F فإن $A(\lambda)$ يكون حاصل ضرب مصفوفات أولية .

III. لا تتغير رتبة مصفوفة λ من خلال تحويلات أولية .

نقول عن مصفوفتين λ مربعتين ومن الدرجة n ، $A(\lambda)$ و $B(\lambda)$ عناصرهما من $F[\lambda]$ ، إنهما متكافئتين فيما إذا وجد $P(\lambda) = H_s \ldots H_2 \cdot H_1$ و $Q(\lambda) = K_1 \cdot K_2 \ldots K_t$ بحيث يكون

$$B(\lambda) = P(\lambda) \cdot A(\lambda) \cdot Q(\lambda) \tag{24.1}$$

وهكذا نجد :

IV. أن المصفوفات λ من الدرجة $m \times n$ المتكافئة تكون ذات رتبة واحدة .

المجموعة القانونية :

سنبرهن فى المسألتين ١ و ٢ ما يلى :

V. بفرض أن $A(\lambda)$ و $B(\lambda)$ مصفوفتين متكافئتين رتبتهما r فإن القاسم المشترك الأعظم لجميع مصغرات $A(\lambda)$ المربعة من الدرجة s حيث $s \leq r$ هو أيضا القاسم المشترك الأعظم لجميع مصغرات $B(\lambda)$ المربعة من الدرجة s .

سنبرهن فى المسألة ٣ :

VI يمكن اختزال كل مصفوفة لا مبدا $A(\lambda)$ من الرتبة r بواسطة تحويلات أولية إلى شكل سميث النظامى التالى :

$$N(\lambda) = \begin{bmatrix} f_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_2(\lambda) & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & f_r(\lambda) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \qquad (24.2)$$

حيث $f_i(\lambda)$ كثير حدود واحدى ويقسم $f_{i+1}(\lambda)$, $(i = 1, 2, \dots, r-1)$.

عندما تختزل مصفوفة لا مبدا $A(\lambda)$ من الرتبة r إلى (24.2) فإن القاسم المشترك الأعظم لكل المصغرات المربعة من الدرجة s لـ $A(\lambda)$ حيث $s \le r$ هو القاسم المشترك الأعظم لكل المصغرات المربعة من الدرجة s لـ $N(\lambda)$ وذلك استنادا إلى النظرية V .

بما أن فى $N(\lambda)$ كل $f_i(\lambda)$ يقسم $f_{i+1}(\lambda)$ فإن القاسم المشترك الأعظم لكل المصغرات المربعة من الدرجة s لـ $N(\lambda)$ وبالتالى لـ $A(\lambda)$ هو :

$$g_s(\lambda) = f_1(\lambda) \cdot f_2(\lambda) \cdot \ldots \cdot f_s(\lambda), \quad (s = 1, 2, \dots, r) \qquad (24.3)$$

لنفرض أن $A(\lambda)$ قد اختزل إلى

$$N(\lambda) = \operatorname{diag}(f_1(\lambda), f_2(\lambda), \dots, f_r(\lambda), 0, \dots, 0)$$

وإلى :

$$N_1(\lambda) = \operatorname{diag}(h_1(\lambda), h_2(\lambda), \dots, h_r(\lambda), 0, \dots, 0)$$

نجـد من (24.3)

$$g_s(\lambda) = f_1(\lambda) \cdot f_2(\lambda) \cdot \ldots \cdot f_s(\lambda) = h_1(\lambda) \cdot h_2(\lambda) \cdot \ldots \cdot h_s(\lambda)$$

والآن $g_1(\lambda) = f_1(\lambda) = h_1(\lambda)$, $g_2(\lambda) = f_1(\lambda) \cdot f_2(\lambda) = h_1(\lambda) \cdot h_2(\lambda)$ بحيث يكون $f_2(\lambda) = h_2(\lambda), \dots;$ ، بصورة عامة إذا عرفنا $g_0(\lambda) = 1$ فإن :

$$g_s(\lambda)/g_{s-1}(\lambda) = f_s(\lambda) = h_s(\lambda), \quad (s = 1, 2, \dots, r) \qquad (24.4)$$

ونجـد :

VII. تتعين المصفوفة $N(\lambda)$ المعرفة فى (24.2) بشكل وحيد من المصفوفة المعطية $A(\lambda)$.

وهكذا فإن مصفوفات سميث النظامية تكون مجموعة قانونية بالنسبة للتكافؤ على $F[\lambda]$.

مثال ١ :

اعتبر

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda + 2 & \lambda + 1 & \lambda + 3 \\ \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda & \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda & 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda \\ \lambda^2 + 3\lambda + 2 & \lambda^2 + 2\lambda + 1 & 3\lambda^2 + 6\lambda + 3 \end{bmatrix}$$

إن من الواضح أن القاسم المشترك الأعظم للمصغرات ذات الصف الواحد (عناصر) من $A(\lambda)$ هو $g_1(\lambda) = 1$ وأن القاسم المشترك الأعظم للمصغرات ذات الصفين من $A(\lambda)$ هو $g_2(\lambda) = \lambda$ وأن $g_3(\lambda) = \frac{1}{2}|A(\lambda)| = \lambda^3 + \lambda^2$. وهكذا نجد من (24.2) أن :

$$f_1(\lambda) = g_1(\lambda) = 1, \quad f_2(\lambda) = g_2(\lambda)/g_1(\lambda) = \lambda, \quad f_3(\lambda) = g_3(\lambda)/g_2(\lambda) = \lambda^2 + \lambda$$

وأن شكل سميث النظامى لـ $A\ (\lambda)$ هو :

$$N(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda \end{bmatrix}$$

ولاختزال آخر أنظر المسألة ٤ :

العوامل اللا متغيرة :

تسمى كثيرات الحدود $f_1(\lambda), f_2(\lambda), \ldots, f_r(\lambda)$ الواقعة فى قطر شكل سميث النظامى لـ $A\ (\lambda)$ عوامل لامتغيرة لـ $A\ (\lambda)$. إذا كان $f_k(\lambda) = 1$ حيث $r \geqq k$ فإن $f_1(\lambda) = f_2(\lambda) = \ldots = f_k(\lambda) = 1$ وتسمى كل واحد من كثيرات الحدود هذه عاملا لا متغيراً تافهاً .

كنتيجة للنظرية VII نجد :

VIII. تكون مصفوفتا λ المربعتين من الدرجة n والمعرفة على $F\ [\lambda]$ متكافئتين على $F\ [\lambda]$ فيما إذا كان (وإذا كان فقط) لهما نفس العوامل اللامتغيرة .

القواسم الأولية :

لتكن $A\ (\lambda)$ مصفوفة لا مبدا مربعة ومن الدرجة n على $F\ [\lambda]$ ولنفرض أنه يمكن كتابة عواملها اللامتغيرة بالشكل التالى :

$$f_i(\lambda) = \{p_1(\lambda)\}^{q_{i1}} \{p_2(\lambda)\}^{q_{i2}} \ldots \{p_s(\lambda)\}^{q_{is}}, \ (i = 1, 2, \ldots, r) \qquad (24.5)$$

حيث $p_1(\lambda), p_2(\lambda), \ldots, p_s(\lambda)$ كثيرات حدود واحدية متباينة وغير قابلة للاختزال على $F\ [\lambda]$. إن بعض q_{ij} يمكن أن يكون صفرا ويحذف فى هذه الحالة المعامل المناظر ولكن بما أن $f_i(\lambda)$ يقسم $f_{i+1}(\lambda)$ فإن $q_{i,j} \leqq q_{i+1,j}$ حيث $(i = 1, 2, \ldots r\text{-}1\ ; j = 1, 2, \ldots, s)$

إن العوامل $\{p_j(\lambda)\}^{q_{ij}} \neq 1$ التى تظهر فى (24.5) تسمى قاسما أوليا على $F\ [\lambda]$ لـ $A\ (\lambda)$.

مثال ٢ :

لنفرض أن لمصفوفة λ مربعة $A\ (\lambda)$ ومن الدرجة 10 ، على حقل الأعـداد الجذرية يكون له شكل سميث النظامى التالى :

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda^2+1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda^2+1)^2\lambda & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^2(\lambda^2+1)^2\lambda^2(\lambda^2-3) & \\ \hline & & 0 & & & 0 \end{array}\right]$$

إن رتبة هذا الشكل تساوى 5 وإن عوامله اللامتغيرة هى :

$$f_1(\lambda) = 1, \quad f_2(\lambda) = 1, \quad f_3(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda^2+1),$$
$$f_4(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda^2+1)^2\lambda, \quad f_5(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda^2+1)^2\lambda^2(\lambda^2-3)$$

إن قواسمه الأولية هى :

$$(\lambda-1)^2,\ \lambda-1,\ \lambda-1,\ (\lambda^2+1)^2,\ (\lambda^2+1)^2,\ (\lambda^2+1),\ \lambda^2,\ \lambda,\ \lambda^2-3$$

نلاحظ أن القواسم الأولية ليست ، بالضرورة ، مختلفة . لقد كتب فى القائمة السابقة كل مقسوم أولى كما يظهر غالبا فى العوامل اللامتغيرة .

مثال ٣ :

(ا) إن العوامل اللامتغيرة لـ $A(\lambda)$ الواردة فى المثال ٢ لا تتغير على حقل الأعداد الحقيقية ولكن القواسم الأولية تأخذ الشكل :

$$(\lambda-1)^2,\ \lambda-1,\ \lambda-1,\ (\lambda^2+1)^2,\ (\lambda^2+1)^2,\ (\lambda^2+1),\ \lambda^2,\ \lambda,\ \lambda-\sqrt{3},\ \lambda+\sqrt{3}$$

لأنه لا يمكن تحليل λ^2-3

(ب) على حقل الأعداد المركبة ، تبقى العوامل اللامتغيرة كما هى ، بينما تصبح القواسم الأولية كما يلى :

$$(\lambda-1)^2,\ \lambda-1,\ \lambda-1,\ (\lambda+i)^2,\ (\lambda+i)^2,\ \lambda+i,\ (\lambda-i)^2,$$
$$(\lambda-i)^2,\ \lambda-i,\ \lambda^2,\ \lambda,\ \lambda-\sqrt{3},\ \lambda+\sqrt{3}$$

إن العوامل اللامتغيرة لمصفوفة λ تعين رتبتها وقواسمها الأولية وعلى العكس فإن رتبة مصفوفة وقواسمها الأولية تعين عواملها اللامتغيرة .

مثال ٤ :

لنفرض أن القواسم الأولية لمصفوفة لامبدا $A(\lambda)$ المربعة ذات الدرجة السادسة والرتبة الخامسة هى :

$$\lambda^3,\ \lambda^2,\ \lambda,\ (\lambda-1)^2,\ (\lambda-1)^2,\ \lambda-1,\ (\lambda+1)^2,\ \lambda+1$$

أوجد العوامل اللامتغيرة لهذه المصفوفة ، واكتب شكل سميث القانونى لها .

لإيجاد $f_5(\lambda)$ كون المضاعف المشترك الأصغر للقواسم الأولية أى :

$$f_5(\lambda) = \lambda^3(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2$$

ولإيجاد $f_4(\lambda)$ نحذف من قائمة القواسم الأولية تلك التى استعملت فى تكوين $f_5(\lambda)$ ثم نوجد المضاعف المشترك الأصغر للقواسم الباقية فنجد :

$$f_4(\lambda) = \lambda^2(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

نعيد الكرة $f_3(\lambda) = \lambda(\lambda-1)$ فتكون بذلك قد استعملنا كل القواسم الأولية ونجد : $f_2(\lambda) = f_1(\lambda) = 1$ ويكون شكل سميث القانونى هو :

$$N(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2(\lambda-1)^2(\lambda+1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^3(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بما أن العوامل اللامتغيرة لمصفوفة λ تكون لا متغيرة من خلال تحويل أولى فإن القواسم الأولية تبقى كذلك كما هى بعد تحويل أولى : لهذا

IX. تكون مصفوفتا λ المربعتان ومن الدرجة n والمعرفتين على $F[\lambda]$ ، متكافئتين على $F[\lambda]$ فيما إذا كان (وإذا كان فقط) لهما رتبة واحدة وكانت لهما نفس القواسم الأولية .

مسائل محلولة

١ – برهن أنه إذا كان $P(\lambda)$ حاصل ضرب مصفوفات أولية . فإن القاسم المشترك الأعظم لكل المصغرات المربعة من الدرجة s لـ $P(\lambda) \cdot A(\lambda)$ هو أيضا القاسم المشترك الأعظم لكل المصغرات المربعة ذات الدرجة s لـ $A(\lambda)$ إن من الضرورى أن نعتبر فقط حالات $P(\lambda) \cdot A(\lambda)$ التى يكون فيها $P(\lambda)$ واحدا من المصفوفات الأولية الثلاثة H .

لنفرض أن $R(\lambda)$ مصغر مربع من الدرجة s لـ $A(\lambda)$ ولنفرض أن $S(\lambda)$ مصغر مربع من الدرجة s لـ $P(\lambda) \cdot A(\lambda)$ له نفس وضع $R(\lambda)$. ولنعتبر $P(\lambda) = H_{ij}$ ، إن تأثير هـذا التحويل على $A(\lambda)$ هو إما (i) أن يترك $R(\lambda)$ بدون تغيير وإما (ii) أن يبادل بين صفين من صفوف $R(\lambda)$ وإما (iii) أن يبادل بين صف من $R(\lambda)$ وصف آخر لا يقع فى $R(\lambda)$. فى الحالة (i) يكون $S(\lambda) = R(\lambda)$ ، وفى الحالة (ii) يكون $S(\lambda) = -R(\lambda)$ أما فى الحالة (iii) فإن $S(\lambda)$ يساوى ، باهمال الإشارة ، مصغرا مربعا آخر من الدرجة s لـ $A(\lambda)$.

اعتبر الآن $P(\lambda) = H_i(k)$ فيكون عندها إما $S(\lambda) = R(\lambda)$ أو $S(\lambda) = kR(\lambda)$.

لنعتبر أخيراً $P(\lambda) = H_{ij}(f(\lambda))$ فيكون التأثير على $A(\lambda)$ واحدة من الحالات الآتية :

(i) يترك هذا التحويل $R(\lambda)$ كما هو بلا تغيير ، (ii) يضيف إلى واحد من صفوف $R(\lambda)$ حاصل ضرب $f(\lambda)$ بصف آخر من $R(\lambda)$. (iii) يضيف إلى صف من صفوف $R(\lambda)$ حاصل ضرب صف آخر ، غير واقع فى $R(\lambda)$ فى $f(\lambda)$. فى الحالتين (i) و (ii) يكون $S(\lambda)=R(\lambda)$ أما فى الحالة (iii) فيكون :

$$S(\lambda) = R(\lambda) \pm f(\lambda) \cdot T(\lambda)$$

حيث $T(\lambda)$ مصغر مربع من الدرجة s لـ $A(\lambda)$.

وهكذا نجـد أن كل مصغر مربع من الدرجة s لـ $P(\lambda) \cdot A(\lambda)$ هو تركيب خطى لمصغرات مربعة من الدرجة s لـ $A(\lambda)$. إذا كان $g(\lambda)$ القاسم المشترك الأعظم لكل المصغرات المربعة ذات الدرجة s لـ $A(\lambda)$ وإذا كان $g_1(\lambda)$ القاسم المشترك الأعظم لكل المصغرات المربعة ذات الدرجة s لـ $P(\lambda) \cdot A(\lambda)$ فيكون إذن $g(\lambda)$ قاسم لـ $g_1(\lambda)$. لنفرض أن $B(\lambda) = P(\lambda) \cdot A(\lambda)$

الآن $A(\lambda) = P^{-1}(\lambda) \cdot B(\lambda)$ و $P^{-1}(\lambda)$ هى حواصل مصفوفات أولية وينتج عن ذلك أن $g_1(\lambda)$ يقسم $g(\lambda)$ وأن $g_1(\lambda) = g(\lambda)$

٢ – برهن أنه إذا كان $P(\lambda)$ و $Q(\lambda)$ هى حواصل ضرب مصفوفات أولية فإن القاسم المشترك الأعظم لكل المصفوفات المربعة ذات الدرجة s لـ $P(\lambda) \cdot A(\lambda) \cdot Q(\lambda)$ هو أيضا القاسم المشترك الأعظم لكل المصغرات المربعة ذات الدرجة s لـ $A(\lambda)$.

لنفرض أن $B(\lambda) = P(\lambda) \cdot A(\lambda)$. و $C(\lambda) = B(\lambda) \cdot Q(\lambda)$. بما أن $C'(\lambda) = Q'(\lambda) \cdot B'(\lambda)$ و $Q'(\lambda)$ هى حواصل ضرب مصفوفات أولية ، فإن القاسم المشترك الأعظم لكل المصغرات المربعة ذات الدرجة s لـ $C'(\lambda)$ هو القاسم المشترك الأعظم لكل المصغرات المربعة ذات الدرجة s لـ $B'(\lambda)$ ولكن القاسم المشترك الأعظم لكل المصغر المربعة ذات الدرجة s لـ $C'(\lambda)$ هو القاسم المشترك الأعظم لجميع مصغرات $C(\lambda)$ المربعة من درجة s . والأمر صحيح أيضا بالنسبة لكل من $B'(\lambda)$

و $B(\lambda)$. وهكذا نجد أن القاسم المشترك الأعظم لكل المصغرات المربعة ذات الدرجة s لـ $C(\lambda) = P(\lambda) \cdot A(\lambda) \cdot Q(\lambda)$ هو نفسه القاسم المشترك الأعظم لكل المصغرات المربعة ذات الدرجة s لـ $A(\lambda)$.

٣ – برهن على أن كل مصفوفة لا مبدا من الشكل $A(\lambda) = [\, a_{ij}(\lambda) \,]$ ومن الرتبة r يمكن اختزالها بتحويلات أولية إلى شكل سميث النظامى :

$$N(\lambda) = \begin{bmatrix} f_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_2(\lambda) & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & f_r(\lambda) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

حيث يكون كل $f_i(\lambda)$ واحديا و $f_i(\lambda)$ يقسم $f_{i+1}(\lambda)$ حيث ($i = 1, 2, ..., r\text{-}1$)

إن النظرية صحيحة فى حالة $A(\lambda) = 0$ فلنفرض إذا أن $A(\lambda) \neq 0$ أى أنه يوجد عنصر $a_{ij}(\lambda) \neq 0$ ومن أقل درجة . بواسطة تحويل من النوع ٢ ، يمكن جعل هذا العنصر واحديا وبالمبادلة المناسبة بين الصفوف والأعمدة يمكن وضع هذا العنصر فى الموضع (1,1) فى المصفوفة المفروضة ليصبح العنصر الجديد $a_{11}(\lambda)$

(ا) لنفرض أن $a_{11}(\lambda)$ يقسم كل عنصر آخر من $A(\lambda)$. وينتج عن ذلك أن تحويلا من النوع (٣) يختزل المصفوفة $A(\lambda)$ إلى الشكل :

$$\begin{bmatrix} f_1(\lambda) & 0 \\ 0 & B(\lambda) \end{bmatrix} \qquad \text{(i)}$$

حيث $f_1(\lambda) = a_{11}(\lambda)$

(ب) لنفرض أن $a_{11}(\lambda)$ لا يقسم كل عنصر من $A(\lambda)$ وأن $a_{1j}(\lambda)$ هو عنصر من الصف الأول لا يقبل القسمة على $a_{11}(\lambda)$. يمكننا استنادا إلى النظرية I من الفصل ٢٣ أن نكتب :

$$a_{1j}(\lambda) = q(\lambda)\, a_{11}(\lambda) + r_{1j}(\lambda)$$

حيث $r_{1j}(\lambda)$ من درجة أقل من درجة $a_{11}(\lambda)$ ، لنطرح من العمود ذى الرقم j حاصل ضرب $q(\lambda)$ بالعمود الأول بحيث يصبح العنصر الجديد الواقع فى الصف الأول والعمود j هو $r_{1j}(\lambda)$. لنجعل بوساطة تحويل من النوع ٢ من العنصر واحديا وبتبديل بين الأعمدة ، نضعه فى الموضع (1,1) ليصبح $a_{11}(\lambda)$ إذا كان الآن $a_{11}(\lambda)$ قاسما لكل عنصر من $A(\lambda)$ فإننا نستمر للحصول على (i) وإلا ، فبعد عدد محدود من تكرار هذه الطريقة ، سنحصل على مصفوفة يقبل كل عنصر واقع فى الصف الأول والعمود الأول ، القسمة على العنصر الذى يحتل الموضع (1,1) .

إذا قسم هذا العنصر كل عنصر من $A(\lambda)$ فإننا نتبع الطريقة إلى أن نحصل على (i) وإلا فإننا نفرض أن $a_{ij}(\lambda)$ لا يقبل القسمة على $a_{11}(\lambda)$. لنفرض أن $a_{i1}(\lambda) = q_{i1}(\lambda) \cdot a_{11}(\lambda)$ و $a_{1j}(\lambda) = q_{1j}(\lambda) \cdot a_{11}(\lambda)$. لنطرح من الصف ذى الرقم i حاصل ضرب $q_{i1}(\lambda)$ بالصف الأول . إن هذا يحل الصفر محل $a_{i1}(\lambda)$ ويحل $a_{ij}(\lambda) - q_{i1}(\lambda) \cdot a_{1j}(\lambda)$. محل $a_{ij}(\lambda)$. فلنضف الآن الصف ذا الرقم i إلى الصف الأول . إن هذا العمل يبقى $a_{11}(\lambda)$ كما كان بدون تغيير ولكنه يحل محل $a_{1j}(\lambda)$.

$$a_{ij}(\lambda) - q_{i1}(\lambda).\, a_{1j}(\lambda) + a_{1j}(\lambda) = a_{ij}(\lambda) + q_{1j}(\lambda)\{1 - q_{i1}(\lambda)\}\, a_{11}(\lambda)$$

بما أن هذا غير قابل للقسمة على $a_{11}(\lambda)$ فإننا نقسمه على $a_{11}(\lambda)$ ونجد كالسابق ، تعويضا آخر (الباقى) العنصر $a_{11}(\lambda)$. نتابع هذه الطريقة حتى نحصل على كثير حدود واحدى من كثيرات الحدود التى نختارها كعنصر $a_{11}(\lambda)$ لا يقسم عنصر من عناصر المصفوفة بعد عدد محدود من المراحل المشابهة لما سبق نحصل على $a_{11}(\lambda)$ يقسم كل عنصر ونحصل من جديد على (i) .

وأخيرا إذا عاملنا $B(\lambda)$ بالطريقة السابقة ذاتها فسوف نحصل على :

$$\begin{bmatrix} f_1(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & f_2(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & C(\lambda) \end{bmatrix}$$

ونحصل فى النهاية على شكل سميث النظامى المطلوب .

بما أن $f_1(\lambda)$ هو قاسم لكل عنصر من $B(\lambda)$ و $f_2(\lambda)$ هو القاسم المشترك الأعظم لعناصر $B(\lambda)$ فإن $f_1(\lambda)$ يقسم $f_2(\lambda)$. وبطريقة مشابهة نجد أن كل $f_i(\lambda)$ يقسم $f_{i+1}(\lambda)$.

٤ – اختزل :

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda+2 & \lambda+1 & \lambda+3 \\ \lambda^3+2\lambda^2+\lambda & \lambda^3+\lambda^2+\lambda & 2\lambda^3+3\lambda^2+\lambda \\ \lambda^2+3\lambda+2 & \lambda^2+2\lambda+1 & 3\lambda^2+6\lambda+3 \end{bmatrix}$$

إلى شكل سميث النظامى لها .

ليس من الضرورى أن نتبع هنا طريقة المسألة ٣ . إن العنصر $f_1(\lambda)$ من شكل سميث النظامى هو القاسم المشترك الأعظم لعناصر $A(\lambda)$ ومن الواضح أن هذا العنصر هو الواحد . سنعمل مباشرة بحيث يحتل هذا العنصر الموضع (1,1) وبذلك نحصل على العلاقة (i) للمسألة ٣ . بعد أن نطرح العمود الثانى من العمود الأول نحصل على :

$$A(\lambda) \sim \begin{bmatrix} 1 & \lambda+1 & \lambda+3 \\ \lambda^2 & \lambda^3+\lambda^2+\lambda & 2\lambda^3+3\lambda^2+\lambda \\ \lambda+1 & \lambda^2+2\lambda+1 & 3\lambda^2+6\lambda+3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \lambda+1 & \lambda+3 \\ 0 & \lambda & \lambda^3+\lambda \\ 0 & 0 & 2\lambda^2+2\lambda \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda^3+\lambda \\ 0 & 0 & 2\lambda^2+2\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B(\lambda) \end{bmatrix}$$

ويكون الآن القاسم المشترك الأعظم لعناصر $B(\lambda)$ هو λ . وهكذا يكون :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda^3+\lambda \\ 0 & 0 & 2\lambda^2+2\lambda \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda^2+2\lambda \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda \end{bmatrix}$$

وهو الشكل المطلوب .

٥ – اختزل .

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda-1 & \lambda+2 \\ \lambda^2+\lambda & \lambda^2 & \lambda^2+2\lambda \\ \lambda^2-2\lambda & \lambda^2-3\lambda+2 & \lambda^2+\lambda-3 \end{bmatrix}$$

إلى شكل سميث النظامى لها .

نجد على التوالى :

$$A(\lambda) \sim \begin{bmatrix} 1 & \lambda-1 & \lambda+2 \\ \lambda & \lambda^2 & \lambda^2+2\lambda \\ \lambda-2 & \lambda^2-3\lambda+2 & \lambda^2+\lambda-3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \lambda-1 & \lambda+2 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda-1 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda-1 \\ 0 & \lambda+1 & \lambda+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda+1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1) \end{bmatrix}$$

وذلك باستعمال التحويلات الأولية : $K_{12}(-1);\ H_{21}(-\lambda),\ H_{31}(-\lambda+2);\ K_{21}(-\lambda+1),\ K_{31}(-\lambda-2);\ H_{23}(-1);$
$K_{23}(1);\ H_{32}(\lambda+1),\ H_2(-1);\ K_{32}(-\lambda-1),\ K_3(-1).$

مسائل اضافية

٦ – برهن أن : $H_{ij}K_{ij} = H_i(k)K_i(1/k) = H_{ij}(f(\lambda))\cdot K_{ji}(-f(\lambda)) = I.$

٧ – برهن أن مصفوفة لامبدا $A(\lambda)$ مربعة من درجة n تأخذ شكل حاصل ضرب مصفوفات أولية فيما إذا كان (وإذا كان فقط) $|A(\lambda)|$ ثابتا غير صفرى .

٨ – برهن أنه يمكن اختزال مصفوفة لامبدا $A(\lambda)$ المربعة من الدرجة n إلى I بواسطة تحويلات أولية فيما إذا كان (وإذا كان فقط) $|A(\lambda)|$ ثابتا غير صفرى .

٩ – برهن أنه يكون لمصفوفة لامبدا $A(\lambda)$ المعرفة على $F[\lambda]$ معكوس عناصره من $F[\lambda]$ إذا كانت (وإذا كانت فقط) $A(\lambda)$ حاصل ضرب مصفوفات أولية .

١٠ – أوجد مصفوفتين $P(\lambda)$ و $Q(\lambda)$ بحيث يكون $P(\lambda)\cdot A(\lambda)\cdot Q(\lambda) = I$ ثم أوجد بعدها :

$$A(\lambda)^{-1} = Q(\lambda)\cdot P(\lambda)$$

علما أن :

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda+1 & 0 & 1 \\ 1 & \lambda+1 & \lambda \\ 2 & \lambda+2 & \lambda+1 \end{bmatrix}$$

إرشاد : أنظر فى المسألة ٦ من الفصل الخامس . الجواب
$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda+2 & -\lambda-1 \\ \lambda-1 & \lambda^2+2\lambda-1 & -\lambda^2-\lambda+1 \\ -\lambda & -\lambda^2-3\lambda-2 & \lambda^2+2\lambda+1 \end{bmatrix}$$

١١ – اختزل كل مصفوفة مما يلى إلى شكل سميث النظامى لها .

(أ)
$$\begin{bmatrix} \lambda & \lambda & \lambda-1 \\ \lambda^2+\lambda & \lambda^2+2\lambda & \lambda^2-1 \\ 2\lambda^2-2\lambda & \lambda^2-2\lambda & 2\lambda^2-3\lambda+2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}$$

(ب)
$$\begin{bmatrix} \lambda^2+1 & \lambda^3+\lambda & 2\lambda^3-\lambda^2+\lambda \\ \lambda-1 & \lambda^2+1 & \lambda^2-2\lambda+1 \\ \lambda^2 & \lambda^3 & 2\lambda^3-\lambda^2+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3+1 \end{bmatrix}$$

(جـ)

$$\begin{bmatrix} \lambda+1 & 2\lambda-2 & \lambda-2 & \lambda^2 \\ \lambda^2+\lambda+1 & 2\lambda^2-2\lambda+1 & \lambda^2-2\lambda & \lambda^3 \\ \lambda^2-\lambda-2 & 3\lambda^2-7\lambda+4 & 2\lambda^2-5\lambda+4 & \lambda^3-2\lambda^2 \\ \lambda^3+\lambda^2 & 2\lambda^3-2\lambda^2 & \lambda^3-2\lambda^2 & \lambda^3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^4-\lambda^3 \end{bmatrix}$$

(د)

$$\begin{bmatrix} \lambda^2+2\lambda+1 & \lambda^2+\lambda & \lambda^3+\lambda^2+\lambda-1 & \lambda^2+\lambda \\ \lambda^2+\lambda+1 & \lambda^2+1 & \lambda^3 & \lambda^2-1 \\ \lambda^2+\lambda & \lambda^2 & \lambda^3+\lambda-1 & \lambda^2 \\ \lambda^3+\lambda^2 & \lambda^3 & \lambda^4 & \lambda^3+\lambda^2-1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2-1 \end{bmatrix}$$

(هـ)

$$\begin{bmatrix} \lambda^2+1 & \lambda^2+3\lambda+3 & \lambda^2+4\lambda-2 & \lambda^2+3 \\ \lambda-2 & \lambda-1 & \lambda+2 & \lambda-2 \\ 3\lambda+1 & 4\lambda+3 & 2\lambda+2 & 3\lambda+2 \\ \lambda^2+2\lambda & \lambda^2+6\lambda+4 & \lambda^2+6\lambda-1 & \lambda^2+2\lambda+3 \end{bmatrix} \sim I_4$$

(و)

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2-2\lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2(\lambda-1)^2(\lambda+1) \end{bmatrix}$$

١٢ – أوجد القواسم الأولية على حقل الأعداد الجذرية وحقل الأعداد الحقيقية وحقل الأعداد المركبة لكل واحدة من المصفوفات الواردة فى المسألة ١١ .

١٣ – إن كثيرات الحدود التالية هى عوامل لا متغيرة غير تافهة لمصفوفة . أوجد قواسمها الأولية فى حقل الأعداد الحقيقية .

(ا) $\lambda^2-\lambda,\ \lambda^3-\lambda^2,\ \lambda^6-2\lambda^5+\lambda^4$

(ب) $\lambda+1,\ \lambda^2-1,\ (\lambda^2-1)^2,\ (\lambda^2-1)^3$

(جـ) $\lambda,\ \lambda^3+\lambda,\ \lambda^7-\lambda^6+2\lambda^5-2\lambda^4+\lambda^3-\lambda^2$

(د) $\lambda,\ \lambda^3+\lambda,\ \lambda^5+2\lambda^3+\lambda,\ \lambda^6+\lambda^5+2\lambda^4+2\lambda^3+\lambda^2+\lambda$

الجواب :

(ا) $\lambda^4,\ \lambda^2,\ \lambda,\ (\lambda-1)^2,\ \lambda-1,\ \lambda-1$

(ب) $\lambda+1,\ \lambda+1,\ (\lambda+1)^2,\ (\lambda+1)^3,\ \lambda-1,\ (\lambda-1)^2,\ (\lambda-1)^3$

(جـ) $\lambda,\ \lambda,\ \lambda^2,\ \lambda^2+1,\ (\lambda^2+1)^2,\ \lambda-1$

(د) $\lambda,\ \lambda,\ \lambda,\ \lambda,\ \lambda^2+1,\ (\lambda^2+1)^2,\ (\lambda^2+1)^2,\ \lambda+1$

١٤ – إن كثيرات الحدود التالية هى قواسم أولية لمصفوفة رتبتها ستة : ما هى عواملها اللامتغيرة .

(ا) $\lambda,\ \lambda,\ \lambda+1,\ \lambda+2,\ \lambda+3,\ \lambda+4$

(ب) $\lambda^3,\ \lambda^2,\ \lambda,\ (\lambda-1)^2,\ \lambda-1$

(جـ) $(\lambda-1)^3,\ (\lambda-1)^2,\ (\lambda-1)^2,\ \lambda-1,\ (\lambda+1)^2$

(د) $\lambda^5,\ \lambda^3,\ \lambda,\ (\lambda+2)^5,\ (\lambda+2)^4,\ (\lambda+2)^2$

الجواب :

(ا) $1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \lambda,\ \lambda(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)(\lambda+4)$

(ب) $1,\ 1,\ 1,\ \lambda,\ \lambda^2(\lambda-1),\ \lambda^3(\lambda-1)^2$

(جـ) $1,\ 1,\ \lambda-1,\ (\lambda-1)^2,\ (\lambda-1)^2,\ (\lambda-1)^3(\lambda+1)^2$

(د) $1,\ 1,\ 1,\ \lambda(\lambda+2)^2,\ \lambda^3(\lambda+2)^4,\ \lambda^5(\lambda+2)^5$

١٥ – حل مجموعة المعادلات التفاضلية الخطية العادية :

$$\begin{cases} Dx_1 + (D+1)x_2 = 0 \\ (D+2)x_1 - (D-1)x_3 = t \\ (D+1)x_2 + (D+2)x_3 = e^t \end{cases}$$

حيث x_1, x_2, x_3 دوال حقيقية مجهولة لمتغير حقيقى t ، وحيث $D = \dfrac{d}{dt}$

إرشاد : يمكن كتابة هذه المجموعة برموز المصفوفات بالشكل :

$$AX = \begin{bmatrix} D & D+1 & 0 \\ D+2 & 0 & -D+1 \\ 0 & D+1 & D+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ e^t \end{bmatrix} = H$$

والآن تعامل كثيرات الحدود فى D الموجودة فى A كما تعامل كثيرات الحدود فى λ فى مصفوفة λ .
بعد ماتقدم نبدأ بإيجاد شكل يشبه شكل المسألة ٦ فى الفصل الخامس ونستعمل بالترتيب الوارد التحويلات الأولية :

$K_{12}(-1),\ H_1(-1),\ K_{21}(D+1),\ H_{21}(-D-2),\ H_{31}(D+1),\ K_{23}(D),\ H_{23}(-4),\ K_2(\tfrac{1}{2}),\ K_{32}(5D+7),\ H_{32}(-\tfrac{1}{2}D),$
$H_3(2),\ K_3(1/5)$

لنحصل على :

$$PAQ = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5D+6 & 1 & -4 \\ -5D^2-8D-2 & -D & 4D+2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(D+1) & \frac{1}{10}(5D^2+12D+7) \\ -1 & -\frac{1}{2}D & -\frac{1}{10}(5D^2+7D) \\ 0 & \frac{1}{2}D & \frac{1}{10}(5D^2+7D+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & D^2+\frac{9}{5}D+\frac{4}{5} \end{bmatrix} = N_1$$

وهو شكل سميث النظامى لـ A .

نستعمل التحويل الخطى $X = QY$ لتحويل $AX = H$ إلى $AQY = H$

ومن العلاقة $PAQY = N_1 Y = PH$ نجد :

$$(D^2 + \tfrac{9}{5}D + \tfrac{4}{5})y_3 = 6e^t - 1 \quad \text{و} \quad y_1 = 0,\ y_2 = t - 4e^t,$$

$$y_3 = K_1 e^{-4t/5} + K_2 e^{-t} + \tfrac{5}{3}e^t - \tfrac{5}{4} \quad \text{و}$$

نستعمل أخيرا التحويل $X = QY$ لكى نحصل على الحل المطلوب :

$$x_1 = 3C_1 e^{-4t/5} + \tfrac{1}{2}t - \tfrac{3}{8}, \quad x_2 = 12C_1 e^{-4t/5} + C_2 e^{-t} - \tfrac{1}{2}, \quad x_3 = -2C_1 e^{-4t/5} + \tfrac{1}{3}e^t + \tfrac{1}{4}$$

الفصل الخامس والعشرون

كثيرات الحدود الادنى لمصفوفة

المصفوفة المميزة :

إن المصفوفة المميزة $\lambda I - A$ لمصفوفة مربعة A على F من الدرجة n هى مصفوفة لا مبدا غير شاذة ذات عوامل لا متغيرة وقواسم أولية باستخدام (24.4) يسهل علينا برهاننا ما يلى :

I. إذا كانت D مصفوفة قطرية فإن القواسم الأولية لـ $\lambda I - D$ هى عناصرها القطرية .

سنبرهن فى المسألة :

II. تكون مصفوفتان A و B مربعتان من الدرجة n ومعرفتان على F متشابهتين على F فيما إذا كانت (وإذا كانت فقط) لمصفوفتيها المميزتين نفس العوامل اللامتغيرة أو إذا كان لهما رتبة واحدة والقواسم الأولية ذاتها فى $F[\lambda]$.

يستنتج من النظريتين I و II

III. تكون مصفوفة مربعة A من الدرجة n ومعرفة على F ، مشابهة لمصفوفة قطرية إذا كان (وإذا كان فقط) لـ $\lambda I - A$ قواسم أولية خطية فى $F[\lambda]$.

لا متغيرات تشابهية :

تسمى العوامل اللامتغيرة لـ $\lambda I - A$ ، لامتغيرات تشابهية لـ A .

لتكن $P(\lambda)$ و $Q(\lambda)$ مصفوفتين غير شاذتين بحيث يكون $P(\lambda)\cdot(\lambda I - A)\cdot Q(\lambda)$ شكل سميث النظامى .

$$\operatorname{diag}(f_1(\lambda), f_2(\lambda), \ldots, f_n(\lambda))$$

والآن :-

$$|P(\lambda)\cdot(\lambda I - A)\cdot Q(\lambda)| = |P(\lambda)|\cdot|Q(\lambda)|\phi(\lambda) = f_1(\lambda)\cdot f_2(\lambda)\cdot\ldots f_n(\lambda)$$

بما أن $\phi(\lambda)$ و $f_i(\lambda)$ واحديان ، فإن $|P(\lambda)|\cdot|Q(\lambda)| = 1$ ويكون :

IV – إن كثير الحدود المميز لمصفوفة A مربعة ومن الدرجة n هو حاصل ضرب العوامل اللامتغيرة لـ $\lambda I - A$ أو اللامتغيرات التشابهية لـ A .

كثير الحدود الادنى :

ينتج عن نظرية كاييل – هاملتون (الفصل ٢٣) أن كل مصفوفة مربعة A من الدرجة n تحقق معادلتها المميزة $\phi(\lambda) = 0$ ذات الدرجة n. يسمى كثير الحدود الواحدى $m(\lambda)$ ذو الدرجة الدنيا بحيث يكون $m(A) = 0$ كثير الحدود الأدنى لـ A وتسمى $m(\lambda) = 0$ المعادلة الصغرى لـ A . (يسمى $m(\lambda)$ أيضا الدالة الصغرى للمصفوفة A)

إن معظم الطرق الأولية المتبعة لإيجاد كثير الحدود الأدنى لـ $A \neq 0$ تنطوى على الروتين التالى .

(i) إذا كان $A = a_0 I$ فإن $m(\lambda) = \lambda - a_0$;

(ii) إذا كان $A \neq aI$ لكل a ولكن $A^2 = a_1 A + a_0 I$, فإن $m(\lambda) = \lambda^2 - a_1\lambda - a_0$;

(iii) إذا كان $A^2 \neq aA + bI$ لكل a و b ولكن $A^3 = a_2A^2 + a_1A + a_0I,$

فإن :

$$m(\lambda) = \lambda^3 - a_2\lambda^2 - a_1\lambda - a_0$$

وهكـــذا . . . .

مثال ١ :

أوجـــد كثير الحدود الأدنى لـ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$

من الواضح أن $A - a_0I = 0$ مستحيل . ضع :

$$A^2 = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} = a_1\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} + a_0\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

باستعمال العنصرين الأوليين من الصف الأول من كل من هذه المصفوفات فنجد : $\begin{cases} 9 = a_1 + a_0; \\ 8 = 2a_1 \end{cases}$

أى $a_1 = 4$ و $a_0 = 5$. وبعد (ليس قبل) أن تتحقق لكل عنصر من عناصر A^2 يمكننا أن نستنتج أن $A^2 = 4A + 5I$ وأن كثير الحدود الأدنى المطلوب هو $\lambda^2 - 4\lambda - 5$

سنبرهن فى المسألة ٢ :

.V إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n على F وكان $f(\lambda)$ أى كثير حدود على F فإن $f(A) = 0$ إذا كان(وإذا كان فقط)كثير الحدود الأدنى $m(\lambda)$ لـ A قاسما لـ $f(\lambda)$

سنبرهن فى المسألة ٣ :

.VI إن كثير الحدود الأدنى $m(\lambda)$ لمصفوفة مربعة A من الدرجة n هو اللامتغير المتشابهى $f_n(\lambda)$ لـ A ذى الدرجة الأعلى .

بما أن اللامتغيرات المتشابهيه $f_1(\lambda), f_2(\lambda), \ldots, f_{n-1}(\lambda)$ تقسم كلها $f_n(\lambda)$ فإنه يكون :

.VII إن كثير الحدود المميز $\phi(\lambda)$ لـ A هو حاصل ضرب كثير الحدود الأدنى لـ A وعوامل واحدية معينة لـ $m(\lambda)$

و :

.VIII إن المصفوفة المميزة لمصفوفة مربعة A من الدرجة n قواسم أولية خطية متباينة فيما إذا كان (وإذا كان فقط) لكثير الحدود الأدنى $m(\lambda)$ لـ A عوامل خطية متباينة فقط .

المصفوفات غير المتردية :

نقول عن مصفوفة A مربعة من الدرجة n إنها **غير متردية** فيما إذا كان كثير الحدود المميز وكثير الحدود الأدنى لها متطابقين ونقول عنها فى الحالة المخالفة مصفوفة **متردية** ويكون :

.IX تكون مصفوفة A مربعة ومن الدرجة n غير متردية ، فيما إذا كان (وإذا كان فقط) لها لامتغيراً تشابهياً غير تافه واحد فقط .

ومن السهل البرهان على :

.X إذا كان لـ B_1 و B_2 كثيرا حدود ادنيين $m_1(\lambda)$ و $m_2(\lambda)$ على الترتيب ، فإن كثير الحدود الأدنى $m(\lambda)$ للمجموع المباشر $D = \text{diag}(B_1, B_2)$ هو المضاعف المشترك الأصغر لـ $m_1(\lambda)$ و $m_2(\lambda)$

يمكن تمديد هذه النتيجة على المجموع المباشر لـ m مصفوفة .

XI. لتكن $g_1(\lambda), g_2(\lambda), \ldots, g_m(\lambda)$ كثيرات حدود واحدية متباينة وغير قابلة للاختزال من $F[\lambda]$ ولنفرض أن A_j مصفوفة غير مترديه بحيث يكون $|\lambda I - A_j| = \{g_j(\lambda)\}^{a_j}, \quad (j = 1, 2, \ldots, m)$.

فإن $B = \text{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ يكون لها $\phi(\lambda) = \{g_1(\lambda)\}^{a_1} \cdot \{g_2(\lambda)\}^{a_2} \cdots \{g_m(\lambda)\}^{a_m}$ كثير حدود أدنى وكثير حدود مميز في نفس الوقت .

المصفوفة الرفيقة :

لتكن A مصفوفةغير مترديه ذات لا متغير تشابهي غير تافه .

$$g(\lambda) = f_n(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \tag{25.1}$$

تعرف المصفوفة الرفيقة $g(\lambda)$ بما يلي :

$$C(g) = [-a], \quad \text{if } g(\lambda) = \lambda + a \tag{25.2}$$

ولقيم $n>1$ يكون :

$$C(g) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \ \ldots & -a_{n-3} & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \tag{25.3}$$

سنبرهن في المسألة ٤ ما يلي :

XII. إن المصفوفة الرفيقة $C(g)$ لكثير حدود $g(\lambda)$ كثير حدود مميز وكثير حدود أدنى يساويان في وقت معا $g(\lambda)$ (يفضل مؤلفون آخرون تعريف $C(g)$ بمنقول المصفوفة الواردة في (25.3) سنستعمل في هذا الكتاب هاتين الصيغتين) .

من السهل البرهان على ما يلي :

XIII. إذا كانت A مصفوفة غير مترديه ذات لا متغير تشابهي غير تافه $f_n(\lambda) = (\lambda - a)^n$، فإن .

$$J = [a] \text{ إذا كانت } n = 1 \text{ و } , \quad J = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a \end{bmatrix} \text{ ، إذا كانت } n>1 \tag{25.4}$$

يكون $F_n(\lambda)$ كثير حدود مميز وكثير حدود أدنى له

مسائل محلولة

١ – برهن أن مصفوفتين A و B مربعتين من الدرجة n ومعرفتين على F تكونان متشابهتين على F فيما إذا كان (وإذا كان فقط) لمصفوفتيهما المميزتين نفس العوامل اللامتغيرة أو إذا كان لهما نفس القواسم الأولية في $F[\lambda]$

لنفرض أن A و B متشابهتان نستنتج من العلاقة (i) المسألة ١ ، الفصل ٢٠ ، أن $\lambda I - A$ و $\lambda I - B$ متكافئتان . وينتج عن هذا استنادا إلى النظريتين VIII و IX من الفصل ٢٤ أن لهما نفس العوامل اللامتغيرة والقواسم الأولية نفسها

على العكس ، لنفرض أن لـ $\lambda I - A$ و $\lambda I - B$ العوامل اللامتغيرة نفسها أو القواسم الأولية ذاتها . إن هذا يؤدى استنادا إلى النظرية VIII من الفصل ٢٤ إلى أنه يوجد مصفوفتا لا مبدأ غير شاذتين $P(\lambda)$ و $Q(\lambda)$ بحيث يكون :

$$P(\lambda)\cdot(\lambda I-A)\cdot Q(\lambda) = \lambda I - B$$

أو

$$P(\lambda)\cdot(\lambda I-A) = (\lambda I-B)\cdot Q^{-1}(\lambda) \qquad \text{(i)}$$

لنفرض :

$$P(\lambda) = (\lambda I-B)\cdot S_1(\lambda) + R_1 \qquad \text{(ii)}$$

$$Q(\lambda) = S_2(\lambda)\cdot(\lambda I-B) + R_2 \qquad \text{(iii)}$$

$$Q^{-1}(\lambda) = S_3(\lambda)\cdot(\lambda I-A) + R_3 \qquad \text{(iv)}$$

حيث R_1 و R_2 و R_3 خالية من λ . لنعوض فى (i) فنجـــد :

$$(\lambda I-B)\cdot S_1(\lambda)\cdot(\lambda I-A) + R_1(\lambda I-A) = (\lambda I-B)\cdot S_3(\lambda)\cdot(\lambda I-A) + (\lambda I-B)R_3$$

أو

$$(\lambda I-B)\{S_1(\lambda)-S_3(\lambda)\}(\lambda I-A) = (\lambda I-B)R_3 - R_1(\lambda I-A) \qquad \text{(v)}$$

وهكذا نجـــد $S_1(\lambda) - S_3(\lambda) = 0$ و

$$(\lambda I-B)R_3 = R_1(\lambda I-A) \qquad \text{(vi)}$$

وذلك لأنه ، فى الحالة المعاكسة سيكون الطرف الأيسر من (V) من درجة لا تقل عن الدرجة الثانية بينما درجة الطرف الأيمن منها لا تزيد عن الدرجة الأولى .

إذا استخدمنا (iii) و (iv) و (vi) فإننا نجـــد :

$$\begin{aligned} I &= Q(\lambda)\cdot Q^{-1}(\lambda) \\ &= Q(\lambda)\{S_3(\lambda)\cdot(\lambda I-A) + R_3\} \\ &= Q(\lambda)\cdot S_3(\lambda)\cdot(\lambda I-A) + \{S_2(\lambda)\cdot(\lambda I-B) + R_2\}R_3 \\ &= Q(\lambda)\cdot S_3(\lambda)\cdot(\lambda I-A) + S_2(\lambda)\cdot(\lambda I-B)R_3 + R_2R_3 \\ &= Q(\lambda)\cdot S_3(\lambda)\cdot(\lambda I-A) + S_2(\lambda)\cdot R_1\cdot(\lambda I-A) + R_2R_3 \end{aligned}$$

أو

$$I - R_2R_3 = \{Q(\lambda)\cdot S_3(\lambda) + S_2(\lambda)\cdot R_1\}(\lambda I-A) \qquad \text{(vii)}$$

والآن $Q(\lambda)\cdot S_3(\lambda) + S_2(\lambda)R_1 = 0$ و $I = R_2R_3$ وذلك لأنه فى الحالة المعاكسة سيكون الطرف الأيسر من (vii) من الدرجة صفر بالنسبة λ بينما تكون درجة الطرف الأيمن مساوية الواحد على الأقل . أى أن $R_3 = R_2^{-1}$ ونستنتج من (vi) :

$$\lambda I - B = R_1(\lambda I-A)R_2 = \lambda R_1R_2 - R_1AR_2$$

بما أن A و B و R_1 و R_2 خالية λ فإن $R_1 = R_2^{-1}$ وهكذا $\lambda I - B = \lambda I - R_2^{-1}AR_2$ وإن A و B متشابهان وهو المطلوب إثباته .

٢ – برهن ما يلى : إذا كانت A هى أى مصفوفة مربعة من الدرجة n على F وكان $f(\lambda)$ كثير حدود فى $F[\lambda]$

فإن $f(A)=0$ إذا كان (و إذا كان فقط) كثير الحدود الأدنى $m(\lambda)$ لـ (A) قاسماً لـ $f(\lambda)$.
نستنتج من طريقة التقسيم الواردة في الفصل ٢٢ .

$$f(\lambda) = q(\lambda)\cdot m(\lambda) + r(\lambda)$$

وينتج عن ذلك أن :

$$f(A) = q(A)\cdot m(A) + r(A) = r(A)$$

لنفرض أن $f(A)=0$ فينتج أن $r(A) = 0$. الآن إذا كان $r(\lambda) \neq 0$ فإن درجته تقل عن درجة $m(\lambda)$ وهذا يخالف لما فرضناه من كون $m(\lambda)$ هو كثير الحدود الأدنى لـ A فلابد إذن أن يكون $r(\lambda) = 0$ وأن $m(\lambda)$ قاسما لـ $f(\lambda)$.

لبرهان العكس ، نفرض $f(\lambda) = q(\lambda)\cdot m(\lambda)$. ويكون $f(A) = q(A)\cdot m(A) = 0.$

٣ – برهن ما يلي : أن كثير الحدود الأدنى $m(\lambda)$ لمصفوفة مربعة A من الدرجة n هو اللامتغير التشابهي $f_n(\lambda)$ لـ A ذي الدرجة الأعلى .

لنرمز بالرمز $g_{n-1}(\lambda)$ للقاسم المشترك الأعظم للمصغرات المربعة ذات الدرجة $(n-1)$ للمصفوفة $\lambda I - A$ فيكون :

$$|\lambda I-A| = \phi(\lambda) = g_{n-1}(\lambda)\cdot f_n(\lambda)$$

و

$$\operatorname{adj}(\lambda I-A) = g_{n-1}(\lambda)\cdot B(\lambda)$$

حيث القاسم المشترك الأعظم لعناصر $B(\lambda)$ هو الواحد .

$$(\lambda I-A)\cdot \operatorname{adj}(\lambda I-A) = \phi(\lambda)\cdot I$$

أو

$$(\lambda I-A)\cdot g_{n-1}(\lambda)\cdot B(\lambda) = g_{n-1}(\lambda)\cdot f_n(\lambda)\cdot I$$

$$(\lambda I-A)\cdot B(\lambda) = f_n(\lambda)\cdot I \qquad \text{(i)}$$

وهكذا نجد أن $A - \lambda I$ قاسم لـ $I\cdot f_n(\lambda)$. واستنادا إلى النظرية ٧ من الفصل ٢٣ يكون $f_n(A) = 0$
استنادا إلى النظرية ٧ نجد أن $m(\lambda)$ يقسم $f_n(\lambda)$. لنفرض :

$$f_n(\lambda) = q(\lambda)\cdot m(\lambda) \qquad \text{(ii)}$$

بما أن $m(A) = 0$ فإن $\lambda I - A$ يكون قاسماً لـ $m(\lambda).I$ فلنفرض :

$$m(\lambda)\cdot I = (\lambda I-A)\cdot C(\lambda)$$

وباستخدام العلاقتين (i) و (ii) لنجد :

$$(\lambda I-A)\cdot B(\lambda) = f_n(\lambda)\cdot I = q(\lambda)\cdot m(\lambda)\cdot I = q(\lambda)\cdot(\lambda I-A)\cdot C(\lambda)$$

و

$$B(\lambda) = q(\lambda)\cdot C(\lambda)$$

الآن أن $q(\lambda)$ يقسم كل عنصر من $B(\lambda)$ أي أن $q(\lambda) = 1$ واستنادا إلى (ii) نجد .

$$f_n(\lambda) = m(\lambda)$$

وهو المطلوب برهانه .

٤ – برهن أن المصفوفة $C(g)$ الرفيقة لكثير الحدود $g(\lambda)$ يكون لها $g(\lambda)$ ككثير حدود مميز وكثير حدود أدنى في نفس الوقت .

إن المصفوفة المميزة لـ (25.3) هي :

$$\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & \lambda+a_{n-1} \end{bmatrix}$$

لنضف إلى العمود الأول العمود الثاني مضروبا في λ والعمود الثالث مضروبا في λ^2 والعمود الأخير مضروبا في λ^{n-1} فنجد

$$G(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ g(\lambda) & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & \lambda+a_{n-1} \end{bmatrix}$$

بما أن $|G(\lambda)| = g(\lambda)$ فإن كثير الحدود المميز لـ $C(g)$ هو $g(\lambda)$. بما أن مصغر العنصر $g(\lambda)$ في $G(\lambda)$ هو ± 1 ، فإن القاسم المشترك الأعظم لكل المصغرات ذات الدرجة $(n-1)$ لـ $G(\lambda)$ هو 1 وهكذا نجد أن $C(g)$ مصفوفة غير مترددية بكثير حدودها الأدنى $g(\lambda)$.

ه – إن المصفوفة الرفيقة لكثير الحدود $g(\lambda) = \lambda^5 + 2\lambda^3 - \lambda^2 + 6\lambda - 5$ هو

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & -6 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

وإذا أردنا

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

مسائل اضافية

٦ – اكتب المصفوفة الرفيقة لكل من كثيرات الحدود التالية :

(ا) $\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda - 1$ (د) $\lambda^4 - 2\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda$

(ب) $(\lambda^2 - 4)(\lambda + 2)$ (ه) $\lambda^2(\lambda^2 + 1)$

(جـ) $(\lambda - 1)^3$ (و) $(\lambda + 2)(\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda - 8)$

الجـــواب :

(ا) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$

(د) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (هـ) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ (و) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 16 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

٧ – برهن أن كل مصفوفة من الدرجة الثانية $A=[a_{ij}]$ التي يكون لها $(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}a_{21} \neq 0$ هي مصفوفة غير متردية .

٨ – اختزل $G(\lambda)$ الواردة في المسألة ٤ إلى $\text{diag}(1, 1, \ldots, 1, g(\lambda))$.

٩ – لكل من المصفوفات A الواردة أدناه ، (i) أوجد كثيري الحدود الأدنى والمميز و (ii) أعط قائمة بالعوامل اللامتغير (ع . لا متغيرا) وغير التافهة والقواسم الأولية (ق . ا .) في حقل الأعداد الجذرية .

(ا) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (هـ) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(و) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ -6 & -2 & -3 & -2 \\ -3 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ (ز) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -3 \\ -1 & -6 & -3 & -6 \\ -3 & -3 & -4 & -3 \\ 2 & 6 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ (ح) $\begin{bmatrix} -5 & 4 & -6 & 3 & 8 \\ -2 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 4 & -1 & -6 \\ 4 & -2 & 4 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

الجـــواب :

(ا) $\phi(\lambda) = m(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$ ، ع . لا متغيرا $(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$ ؛ ق.ا. $(\lambda-1), (\lambda-2), (\lambda-3)$.

(ب) $\phi(\lambda) = m(\lambda) = \lambda^3$ ؛ ع . لا متغيرا = ق.ا. = λ^3

(جـ) $\phi(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$ ؛ $m(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)$ ؛ ع. لا متغيرا $\lambda-1, (\lambda-1)(\lambda-2)$ ق . ا $\lambda-1, \lambda-1, \lambda-2$.

(د) $\phi(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda-5)$ ؛ $m(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-5)$ ؛ ع . لا متغيرا $\lambda+1, (\lambda+1)(\lambda-5)$ ق . ا $\lambda+1, \lambda+1, \lambda-5$.

(هـ) $\phi(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2$ ؛ $m(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda$ ؛ ع . لا متغيرا $\lambda, \lambda^2-4\lambda$ ق.ا $\lambda, \lambda, \lambda-4$.

(و) $\phi(\lambda) = \lambda(\lambda+1)^2(\lambda-1)$ ؛ $m(\lambda) = \lambda(\lambda^2-1)$ ؛ ع . لا متغيرا $\lambda+1, \lambda^3-\lambda$ ق.ا. $\lambda, \lambda+1, \lambda+1, \lambda-1$.

(ز) $\phi(\lambda) = \lambda^2(\lambda+1)^2$ ؛ $m(\lambda) = \lambda(\lambda+1)^2$ ؛ ع . لا متغيرا $\lambda, \lambda(\lambda+1)^2$ ق.ا $\lambda, \lambda, (\lambda+1)^2$.

(ح) $\phi(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda^2-\lambda-2)^2$ ؛ $m(\lambda) = \lambda^2-\lambda-2$ ؛ ع. لا متغيرا $\lambda-2, \lambda^2-\lambda-2, \lambda^2-\lambda-2$ ق . ا . $\lambda-2, \lambda-2, \lambda-2, \lambda+1, \lambda+1$.

١٠ – برهن النظريتين VII و VIII

١١ – برهن النظرية X .

إرشاد : إن $m(D) = \text{diag}(m(B_1), m(B_2)) = 0$ يتطلب أن يكون $m(B_1) = m(B_2) = 0$. أي أن $m_1(\lambda)$ و $m_2(\lambda)$ يقسمان $m(\lambda)$

١٢ – برهن النظرية XI .

١٣ – إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n وكان k أصغر عدد صحيح موجب يحقق العلاقة $A^k = 0$ فإن A تسمى مصفوفة معلومة القوى من الدليل k .

برهن أن A تكون معدومة القوى من الدليل k إذا كانت (وإذا كانت فقط) قيمها الخاصة كلها أصفـاراً .

١٤ – برهن (ا) أن القيم الخاصة لمصفوفة مربعة A من الدرجة n ومتساوية القوى تكون مساوية إما إلى الصفر أو إلى الواحـد .

(ب) إن رتبة A تساوى عدد القيم الخاصة المساوية للواحـد .

١٥ – برهن ما يلى : إذا فرضنا أن A,B,C,D مصفوفات على F مربعة من الدرجة n ونفرض أن C و D غير شاذتين فإنه توجد مصفوفتان غير شاذتين P و Q بحيث يكون $PCQ = A,\ PDQ = B$ فيما إذا كان (وإذا كان فقط) لـ $R(\lambda) = \lambda C - A$ و $S(\lambda) = \lambda D - B$ نفس العوامل اللامتغيرة أو القواسم الأولية ذاتها .

إرشاد : اتبع البرهان الوارد فى المسألة ١ ولاحظ التشابه قد استعيض عنه هنا بالتفكافؤ .

١٦ – برهن أنه إذا كان كثير الحدود الأدنى $m(\lambda)$ لمصفوفة A غير شاذة من الدرجة s فإنه يمكن التعبير عن A^{-1} بكثير حدود عددى لـ A من الدرجة $s - 1$.

١٧ – استعمل كثير الحدود الأدنى لإيجاد معكوس المصفوفة A الواردة فى المسألة ٩ (ج) .

١٨ – برهن أن كل عامل خطى $\lambda - \lambda_i$ من $\phi(\lambda)$ هو عامل لـ $m(\lambda)$

إرشاد : هذه النظرية تنتج من النظرية VII

أو افرض العكس واكتب $m(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)\, q(\lambda) + r,$ حيث $r \neq 0$ فيكون $(A - \lambda_i I)\, q(A) + rI = 0$

وهكذا نجـد أن لـ $A - \lambda_i I$ معكوساً .

١٩ – استعمل $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ لكى تبرهن أن كثير الحدود الأدنى ليس حاصل ضرب العوامل المتباينة لـ $\phi(\lambda)$

٢٠ – برهن ما يلى إذا كان $g(\lambda)$ أى كثير حدود عددى فى λ فإن $g(A)$ تكون شاذة إذا كان (وإذا كان فقط) القاسم المشترك الأعظم لـ $g(\lambda)$ و $m(\lambda)$ كثير الحدود الأدنى لـ A يكون $d(\lambda) \neq 1$.

إرشاد : (i) افرض $d(\lambda) \neq 1$ واستعمل النظرية V من الفصل ٢٢ .

(ii) افرض $d(\lambda) = 1$ واستعمل النظرية vi من الفصل ٢٢ .

٢١ – استنتج من المسألة ٢٠ أنه إذا كانت $g(A)$ غير شاذة فإنه يمكن كتابة $[g(A)]^{-1}$ ككثير حدود فى A من درجة تقل عن درجة $m(\lambda)$.

٢٢ – برهن أنه إذا كان كثير الحدود الأدنى $m(\lambda)$ لـ A المعرف على F غير قابل للاختزال على $F[\lambda]$ وإذا كان من الدرجة s فى λ فإن مجموعة كل كثيرات الحدود العددية فى A والتى تأخذ معاملاتها من F وتكون درجتها أصغر من s تشكل حقلا .

٢٣ – لتكن A و B مصفوفتين مربعتين ولنرمز بـ $m(\lambda)$ و $n(\lambda)$ على الترتيب لكثيرى الحدود الأدنيين لـ AB و BA برهن :

(ا) أن $m(\lambda) = n(\lambda)$ عندما لا تكون كل من A و B شاذتين .

(ب) أن $m(\lambda)$ و $n(\lambda)$ يختلفان عن بعضهما بما لا يزيد عن عامل λ وذلك عندما تكون المصفوفتان A و B شاذتين معا .

إرشـاد : $B \cdot m(AB) \cdot A = (BA) \cdot m(BA) = 0$ و $A \cdot n(BA) \cdot B = (AB) \cdot n(AB) = 0.$

٢٤ – لنفرض أن بعد المصفوفة A يساوى $m \times n$ وأن المصفوفة B من السعة $n \times m$ حيث $n<m$ ولنرمز بـ $\phi(\lambda)$ و $\psi(\lambda)$ على الترتيب لكثيرتى الحدود المميزتين لـ AB و BA برهن أن $\phi(\lambda) = \lambda^{m-n}\psi(\lambda).$

٢٥ – لنفرض أن X_i متجهه لا متغير مصاحب لقيمة خاصة بسيطة لـ A . برهن أنه إذا كانت A و B تبديليتين فإن X_i يكون متجه لا متغير لـ B .

٢٦ – إذا كانت المصفوفتان A و B تبديليتين فأوجـد نظرية تتعلق بالمتجهات اللامتغيرة لـ B عندما لا يكون لـ A إلا قيم خاصة بسيطة .

الفصل السادس والعشرون

الشكل قانونية بالنسبة للتشابه

المسألة : لقد رأينا فى الفصل ٢٥ أن المصفوفتين المميزتين للمصفوفتين المربعتين من الدرجة n والمتشابهتين A و $R^{-1}AR$ على F يكون لهما العوامل اللامتغيرة نفسها والقواسم الأولية ذاتها . سنوجد فى هذا الفصل ، ممثلين لمجموعة كل المصفوفات $R^{-1}AR$ التى (i) تتصف بكونها ذات تكوين بسيط (ii) تضع فى الاعتبار إما عواملها اللامتغيرة أو قواسمها الأولية . تسمى هذه المصفوفات التى عددها أربع ، الأشكال القانونية لـ A وهى تناظر المصفوفة القانونية

$$N = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

والتى رأيناها سابقا عند دراسة تكافؤ المصفوفات ذات البعد $m \times n$ والرتبة r .

الصيغ القانونية القياسية (الجذرية) :

لنفرض أن A مصفوفة على F مربعة من الدرجة n ولنفرض أولا ، أن لمصفوفتها المميزة عاملا واحدا فقط لا متغيرا غير تافه $f_n(\lambda)$ إن المصفوفة الرفيقة $C(f_n)$ لـ $f_n(\lambda)$ كما رأينا فى الفصل ٢٥ مشابهة لـ A نقول عن هذه المصفوفات إنها الشكل القانونى الجذرى S لكل المصفوفات المشابهة لـ A .

لنفرض بعد ذلك أن شكل سميث النظامى لـ $\lambda I - A$ هو :

$$\text{diag}\,(1, 1, \ldots, 1, f_j(\lambda), f_{j+1}(\lambda), \ldots, f_n(\lambda)) \tag{26.1}$$

وله العامل اللامتغير غير التافــه $f_i(\lambda)$ من الدرجة s_i حيث $(i = j, j+1, \ldots, n)$. نعرف الشكل القانونى الجذرى (القياسى) لكل المصفوفات المشابهة لـ A بأنه

$$S = \text{diag}\,(C(f_j), C(f_{j+1}), \ldots, C(f_n)) \tag{26.2}$$

لكى نبرهن أن A و S لهما اللامتغيرات التشابهية ذاتها نلاحظ أن $C(f_i)$ مشابه لـ $D_i = \text{diag}\,(1, 1, \ldots, 1, f_i(\lambda))$ وينتج عن ذلك أن S مشابه لـ $\text{diag}(D_j, D_{j+1}, \ldots, D_n)$. وبعد متوالية من المبادلات بين صفين وبين العمودين المقابلين لها نجد أن S مشابهة لـ

$$\text{diag}\,(1, 1, \ldots, 1, f_j(\lambda), f_{j+1}(\lambda), \ldots, f_n(\lambda))$$

وتكون بذلك قد برهنا على ما يلى :

I أن كل مصفوفة مربعة A تكون مشابهة للمجموع المباشر (26.2) للمصفوفات الرفيقة للعوامل اللامتغيرة غير التافهة لـ $\lambda I - A$

لنفرض أن اللامتغيرات التشابهية غير التافهة لـ A على حقل الأعداد الجذرية هى :

مثال ١ :

$$f_8(\lambda) = \lambda + 1, \qquad f_9(\lambda) = \lambda^3 + 1, \qquad f_{10}(\lambda) = \lambda^6 + 2\lambda^3 + 1$$

فيكون عددها :

$$C(f_8) = [-1], \qquad C(f_9) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C(f_{10}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

و

$$S = \operatorname{diag}\left(C(f_8), C(f_9), C(f_{10})\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حيث S هو الشكل المطلوب فى النظرية I .

لنلاحظ أنه ليس الترتيب الذى تقع بموجبه المصفوفات الرفيقة على القطر أهمية تذكر . وهكذا فإن المصفوفة :

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

تكون صيغة أخرى استعملنا فيها منقول كل مصفوفة رفيقة من المصفوفات الواردة أعلاه .

شكل قانونى ثان :

لنفرض أن المصفوفة المميزة لـ A يكون لها كعوامل لا متغيرة وغير تافهة ، كثيرات الحدود $f_i(\lambda)$ الواردة فى (26.1). ولنفرض أيضا أن القواسم الأولية هى قوى t من كثيرات الحدود المتباينة وغير قابلة للاختزال فى $F[\lambda]$: $p_1(\lambda), p_2(\lambda), \ldots, p_t(\lambda)$. ولنفرض أن :

$$f_i(\lambda) = \{p_1(\lambda)\}^{q_{1i}}\{p_2(\lambda)\}^{q_{2i}}\ldots\{p_t(\lambda)\}^{q_{ti}}; \quad (i = j, j+1, \ldots, n) \tag{26.3}$$

حيث ليس من الضرورى أن تظهر كل العوامل لأنه من الممكن أن تكون بعض الـ q's أصفاراً . إن المصفوفة الرفيقة $C(p_k^{q_{ki}})$ لأى عامل يكون لها $\{p_k(\lambda)\}^{q_{ki}}$ كلا متغير تشابهى وحيد ينتج عن هذا أن $C(f_i)$ مشابهة لـ

$$\operatorname{diag}\left(C(p_1^{q_{1i}}), C(p_2^{q_{2i}}), \ldots, C(p_t^{q_{ti}})\right)$$

ونجـد :

II أن كل مصفوفة مربعة A على F مشابهة للمجموع المباشر للمصفوفات الرفيقة للقواسم الأولية على F لـ $\lambda I - A$.

مثال ٢ :

إن القواسم الأولية على حقل الأعداد الجذرية ، للمصفوفة A الواردة فى المثال ١ هى :

$\lambda + 1, \lambda + 1, (\lambda + 1)^2, \lambda^2 - \lambda + 1, (\lambda^2 - \lambda + 1)^2,$ إن المصفوفات الرفيقة لهذه القواسم هى على الترتيب :

$$[-1], \quad [-1], \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

والشكل القانونى الوارد فى النظرية II هـو :

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

الشكل القانونى الجاكوبى :

لتكن A المصفوفة الواردة فى البند السابق حيث تعتبر القواسم الأولية لمصفوفتها المميزة ، قوى لكثيرات الحدود غير القابلة للاختزال على $F[\lambda]$ اعتبر قاسما أوليا $\{p(\lambda)\}^q$ إذا كان $q=1$ فإننا نستعمل المصفوفة الرفيقة $C(p)$ وإذا كان $q > 1$ فلنشكل :

$$C_q(p) = \begin{bmatrix} C(p) & M & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & C(p) & M & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C(p) & M \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & C(p) \end{bmatrix} \qquad (26.4)$$

حيث M مصفوفة من درجة مماثلة لدرجة $C(p)$ وتقبل الواحد عنصرا فى زاويتها اليسرى السفلى بينما تكون بقية عناصرها أصفارا . إن المصفوفة $Cq(p)$ الواردة فى (26.4) مع العلم أن $C_1(p) = C(p)$ تدعى

المصفوفة فوق الرفيقة لـ $\{p(\lambda)\}^q$ لنذكر أنه يوجد فى (26.4) خط متصل تساوى عناصره الواحد واقع فوق القطر مباشرة .

عندما نستعمل المصفوفة الرفيقة البديلة $C'(p)$ فإن المصفوفة فوق الرفيقة لـ $\{p(\lambda)\}^q$ تكون

$$C_q(p) = \begin{bmatrix} C'(p) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ N & C'(p) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & N & C'(p) & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C'(p) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N & C'(p) \end{bmatrix}$$

حيث N مصفوفة من نفس درجة $C'(p)$ ويكون فيها الواحد عنصرا واقعا فى الزاوية اليمنى العلوية بينما تكون بقية عناصر هذه المصفوفة أصفارا . يوجد فى هذا الشكل خط متصل كل عنصر فيه يساوى الواحد ، يقع مباشرة تحت القطر .

مثال ٣ :

ليكن $\{p(\lambda)\}^q = (\lambda^2+2\lambda-1)^4$. فيكـون $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، $C(p) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ و

$$C_q(p) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

سنبرهن فى المسألة ١ أن $C_q(p)$ يكون له $\{P(\lambda)\}^q$ كلامتغير وحيد تشابهى وغيرتافه . ينتج عما تقدم أن $C_q(p)$ مشابه لـ $C(pq)$ وأنه يمكن الاستعاضة بالأخير عن الأول ، فى الشكل القانونى الوارد فى النظرية II .

نجـد بعد ما تقـدم :

III تكون كل مصفوفة A على F مشابهة للمجموع المباشر للمصفوفات فوق الرفيقة للقواسم الأوليـة على F لـ $\lambda I - A$

مثال ٤ :

إن المصفوفات فوق الرفيقة للقواسم الأولية $I + \lambda^2-\lambda$ و $\lambda + I$ و $\lambda + I$ للمصفوفة A الواردة فى المثال ٢ هى مصفوفاتها الرفيقة نفسها وإن المصفوفة فوق الرفيقة لـ $(\lambda + I)^2$ هى $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ والمصفوفة فوق الرفيقة لـ $(\lambda^2-\lambda+1)^2$ هى $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ وينتج عما تقدم أن الشكل القانونى الوارد فى النظرية III هو :

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

إن استعمال كلمة « جذرية » فى النظرية I قد يؤدى إلى شئ من الالتباس .

لقد استعملت هذه الكلمة فى الأصل للدلالة على أنه للحصول على الشكل القانونى ، نستعمل عمليات جذرية فقط على الحقل الذى تنتمى إليه عناصر A . إن هذا الأمر طبعا صحيح أيضا للأشكال القانونية (الواردة فيما بعد) فى النظريتين II و III ويضاف التباس آخر إلى ما سبق بسبب تسمية الشكل القانونى الوارد فى النظرية III ، فى بعض الأحيان ، شكلا قانونيا جذريا .

الشكل القانونى الكلاكسيكى :

لنفرض أن القواسم الأولية للمصفوفة المميزة لـ A هى قوى لكثيرات حدود خطية . إن الشكل القانونى للنظرية III هو إذن ، المجموع المباشر للمصفوفات فوق الرفيقة الشكل .

$$C_q(p) = \begin{bmatrix} a_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_i \end{bmatrix} \tag{26.5}$$

المناظر للقاسم الأولى $\{p(\lambda)\}^q = (\lambda - a_i)^q$. كمثال على ذلك أنظر المسألة ٢ .

تدعى هذه الحالة الخاصة من الشكل القانونى الوارد فى النظرية III شكل جو ردان القانونى أو الشكل القانونى الكلاسيكى [لاحظ أن $Cq(p)$ الوارد فى (26.5) هو من النوع J الوارد فى (25.4)] ينتج عما سبق :

IV . لنرمز بـ $\mathfrak{F}$ للحقل الذى الذى يمكن فيه لكثير الحدود المميز للمصفوفة A أن يتحلل إلى كثيرات حدود خطية . فتكون عندها ، المصفوفة A مشابهة على $\mathfrak{F}$ إلى المجموع المباشر للمصفوفات فوق الرقيقة الشكل (26.5) يناظر كل مصفوفة قاسم أولى $(\lambda - a_i)^q$

مثال ٥ :

لنفرض أن القواسم الأولية على حقل الأعداد المركبة لـ $\lambda I - A$ هى : $\lambda - i,\ \lambda + i,\ (\lambda - i)^2,\ (\lambda + i)^2$.

إن الشكل القانونى الكلاسيكى لـ A هو :

$$\begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$$

نستنتج من النظرية IV ما يلى :

V . تكون مصفوفة مربعة A من الدرجة n مشابهة لمصفوفة قطرية إذا كانت (وإذا كانت فقط) القواسم الأولية لـ $\lambda I - A$ كثيرات حدود خطية وهذا يعنى أنه إذا كان (وإذا كان فقط) كثير الحدود الأدنى لـ A هو حاصل ضرب كثيرات حدود خطية متباينة .

أنظر المسائل ٢ — ٤ .

اختزال الى الشكل القانونى الجذرى :

استنتاجا من المناقشات التى أوردناها فيما يتعلق بالأشكال القانونية ، سنبرهن أنه يمكن اختزال أى مصفوفة مربعة من الدرجة n إلى شكلها القانونى الجذرى بصورة نظرية على الأقل ، وذلك دون المعرفة المسبقة للعوامل المتغيرة لـ $\lambda I - A$.
توجد طريقة تختلف قليلا عما نورده فى كتاب عنوانه *Modern Algebraic Theories*, Benj. H. Sanborn, 1926.
ولقد تطور هذا الموضوع بشكل حسابى بحث فى Browne, E. T., *American Mathematical Monthly*, vol. 48 (1940).

سنحتاج فيما بعد التعاريف التاليـــة :

إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n وكان X متجها معرفا على F عدد مركباته n ، وإذا كان $g(\lambda)$ كثير الحدود الواحدى فى $F[\lambda]$ ذاالدرجة الأدنى بحيث يكون $g(A).X = 0$ فإننا نقول بالنسبة لـ A إن المتجه X ينتمى لـ $g(\lambda)$

إذا كان بالنسبة لـ A لمتجه X ينتمى لـ $g(\lambda)$ ذات الدرجة p فإن المتجهات المستقلة خطيا $X, AX, A^2X, \ldots, A^{p-1}X$ تدعى السلسلة التى حدها القائد هو X .

مثال ٦ :

لتكن $A = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ أن المتجهين $X = [1, 0, 0]'$ و $AX = [2, 1, 1]'$ مستقلان خطيا بينما $A^2X = X$ ، فيكون عندئذ $(A^2 - I)X = 0$ ويكون المتجه X منتمى لكثير الحدود $\lambda^2 - 1$. إذا كانت $Y = [1, 0, -1]'$ نجـد أن $AY = [-1, 0, 1]' = -Y$; وعلى ذلك $(A + I)Y = 0$ فيكون Y منتميا لكثير الحدود $\lambda + 1$.

إذا كان $m(\lambda)$ كثير الحدود الأدنى لمصفوفة A مربعة من الدرجة n فإنه يكون $m(A) \cdot X = 0$ لكل متجه X عدد مركباته n اذن لايمكن أن توجد سلسلة لايزيد طولها عن درجة $m(\lambda)$. ان كثير الحدود الأدنى للمصفوفة الواردة فى المثال ٦ هو $\lambda^2 - 1$.

لتكن S الشكل القانونى الجذرى للمصفوفة A المربعة وذات الدرجة n على F يوجد عندئذ مصفوفة غير شاذة R على F بحيث يكون :

$$R^{-1}AR = S = R\,\mathrm{diag}(C_j, C_{j+1}, \ldots, C_n) \qquad (26.6)$$

حيث لتلائم أفضل ، يستعاض فى (26.2) عن $C(f_i)$ بـ C_i سنفرض أن C_i المصفوفة الرفيقة للعامل اللامتغير :

$$f_i(\lambda) = \lambda^{s_i} + c_{i,s_i}\lambda^{s_i - 1} + \ldots + c_{i2}\lambda + c_{i1}$$

لهـا الشكل :

$$C_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -c_{i1} \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -c_{i2} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & -c_{i3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -c_{i,s_i-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -c_{is_i} \end{bmatrix}$$

من العلاقة (26.6) نستنتج ما يلى :

$$R^{-1}AR = S = \mathrm{diag}(C_j, C_{j+1}, \ldots, C_n) \qquad (26.7)$$

لنفرض أن R قد فصلت إلى كتل من الأعمدة $R_j, R_{j+1}, \ldots, R_n$ بحيث تحوى R_i و C_i حيث $(i = j, j+1, \ldots, n)$ العدد نفسه من الأعمدة . نستنتج من العلاقة (26.7)

$$\begin{aligned} AR &= A[R_j, R_{j+1}, \ldots, R_n] = [R_j, R_{j+1}, \ldots, R_n] \operatorname{diag}(C_j, C_{j+1}, \ldots, C_n) \\ &= [R_j C_j, R_{j+1} C_{j+1}, \ldots, R_n C_n] \end{aligned}$$

و

$$AR_i = R_i C_i, \quad (i = j, j+1, \ldots, n)$$

لنرمز لمتجهات أعمدة R_i التي عددها s_i بالشكل $R_{i1}, R_{i2}, \ldots, R_{is_i}$ وكون حاصل الضرب :

$$R_i C_i = [R_{i1}, R_{i2}, \ldots, R_{is_i}] C_i = [R_{i2}, R_{i3}, \ldots, R_{is_i}, -\sum_{k=1}^{s_i} R_{ik} c_{ik}]$$

بما أن

$$AR_i = A[R_{i1}, R_{i2}, \ldots, R_{is_i}] = [AR_{i1}, AR_{i2}, \ldots, AR_{is_i}] = R_i C_i$$

فإننا نجد :

$$R_{i2} = AR_{i1}, \quad R_{i3} = AR_{i2} = A^2 R_{i1}, \quad \ldots, \quad R_{is_i} = A^{s_i - 1} R_{i1} \tag{26.8}$$

و

$$-\sum_{k=1}^{s_i} c_{ik} R_{ik} = AR_{is_i} \tag{26.9}$$

بالتعويض من (26.8) وفى (26.9) نجد :

$$-\sum_{k=1}^{s_i} c_{ik} A^{k-1} R_{i1} = A^{s_i} R_{i1}$$

أو

$$(A^{s_i} + c_{is_i} A^{s_i - 1} + \ldots + c_{i2} A + c_{i1} I) R_{i1} = 0 \tag{26.10}$$

من تعريف C_i الوارد أعلاه ، يمكننا كتابة (26.10) بالشكل :

$$f_i(A) \cdot R_{i1} = 0 \tag{26.11}$$

لنرمز لـ R_{i1} بالرمز X_i بحيث تأخذ العلاقة (26.11) الشكل $f_i(A) \cdot X_i = 0$; بما أن المتجهات $X_i, AX_i, A^2 X_i, \ldots, A^{s_i - 1} X_i$ مستقلة خطياً فإن المتجه X_i ينتمى للعامل اللامتغير $f_i(\lambda)$. ينتج مما تقدم أن متجهات أعمدة R_i تتكون من متجهات السلسلة التي يكون فيها X_i الذى ينتمى إلى $f_i(\lambda)$ كحد قائد .

بالاختصار : إن أعمدة R التي عددها n والمستقلة خطياً والتي تحقق العلاقة (26-2) تتكون من $n-j+1$ سلسلة :

$$X_i, AX_i, \ldots, A^{s_i - 1} X_i \qquad (i = j, j+1, \ldots, n)$$

حيث الحدود القائدة تنتمى على الترتيب إلى العوامل اللامتغيرة $f_j(\lambda), f_{j+1}(\lambda), \ldots, f_n(\lambda)$ و حيث تحقق أطولها الشرط $0 < s_j \leq s_{j+1} \leq \ldots \leq s_n$.

ونجد بعد ما تقدم :

VI. لمصفوفة مربعة A درجتها n ومعرفة على F .

(i) ليكن X_n قائداً لسلسلة $\mathcal{C}_n$ ذات طول أقصى لكل المتجهات ذات الـ n مركبة على F .

(ii) ليكن X_{n-1} قائداً لسلسلة ϵ_{n-1}-ذات الطول الأقصى (كل عنصر فيها مستقل خطياً مع العناصر التى سبقته ومع عناصر ϵ_n-) لجميع المتجهات ذات الـ n مركبة على F والتى هى مستقلة خطياً مع متجهات ϵ_n- .

(iii) ليكن X_{n-2} قائداً لسلسلة ϵ_{n-2}- ذات الطول الأقصى) كل عنصر فيها مستقل خطياً مع العناصر التى سبقته ، مع عناصر ϵ_n- و ϵ_{n-1}-) لجميع المتجهات ذات الـ n على F والتى هى مستقلة خطياً مع متجهات ϵ_n- و ϵ_{n-1}- .

وهكـــذا . . .

فيكون بعد هذا ، من أجـــل :

$$R = [X_j, AX_j, \ldots, A^{s_j-1}X_j;\ X_{j+1}, AX_{j+1}, \ldots, A^{s_{j+1}-1}X_{j+1};\ \ldots;\ X_n, AX_n, \ldots, A^{s_n-1}X_n]$$

$R^{-1}AR$ هو الشكل القانونى الجذرى لـ A .

مثـــال ٧ :

لنفرض $A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 2\\1 & 3 & 2\end{bmatrix}$. ولنأخذ $X = [1, 0, 0]'$; فتكون المتجهات $X, AX = [1, 1, 1]',\ A^2X = [3, 5, 6]'$ مستقلة خطياً بينما $A^3X = [14, 25, 30]' = 5A^2X - X$. وينتج عما تقدم أن $(A^3 - 5A^2 + I)X = 0$ وأن X ينتمى إلى $f_3(\lambda) = m(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 1 = \phi(\lambda)$. لنأخـــذ :

$$R = [X, AX, A^2X] = \begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\0 & 1 & 5\\0 & 1 & 6\end{bmatrix}$$

فنجـــد :

$$R^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\0 & 6 & -5\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}, \qquad AR = [AX, A^2X, A^3X] = \begin{bmatrix}1 & 3 & 14\\1 & 5 & 25\\1 & 6 & 30\end{bmatrix}$$

$$R^{-1}AR = \begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 5\end{bmatrix} = S$$

إن A هنا غير متردية كثير حدودها الأدنى $m(\lambda)$ غير قابل للاختزال على حقل الأعداد الجذرية . كل متجه ذى ثلاث مركبات على هذا الحقل ينتمى إلى $m(\lambda)$ (انظر المسألة ١١) ويقود سلسلة طولها ثلاثة . إن المصفوفة R التى تكون فيها متجهات أى سلسلة لمتجهات أعمدة تحقق العلاقة $R^{-1}AR = S$.

مثـــال ٨ :

لتكن المصفوفة $A = \begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\1 & 2 & 2\\2 & 2 & 1\end{bmatrix}$. ولنأخذ $X = [1, -1, 0]'$; فيكون $AX = X$ و X ينتمى إلى $\lambda-1$ والآن $\lambda-1$ لايمكنه أن يكون كثير حدود أدنى $m(\lambda)$ لـ A ولكنه مع ذلك ، قاسم لـ $m(\lambda)$ (انظر المسألة ١١) ويمكنه أن يكون لامتغيراً تشابهياً لـ A .

لنأخذ الآن $Y = [1, 0, 0]'$. فتكون المتجهات $Y,\ AY = [2, 1, 2]',\ A^2Y = [11, 8, 8]'$ مستقلة خطياً بينما $A^3Y = [54, 43, 46]' = 5A^2Y + 3AY - 7Y$. إذن Y ينتمى إلى $m(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 - 3\lambda + 7 = \phi(\lambda)$.

إن كثير الحدود λ-I ليس لامتغيراً تشابهيا . فى الواقع ، إذا لم يكن الاختيار الأول لمتجه ينتمى لكثير الحدود الذى يمكننا أن نسميه بحق ، الدالة الصغرى ، فإن هذا الاختيار يكون زائفا .

ويمكن القارىء أن يتحقق من أن :

$$R^{-1}AR = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

عندما يكون

$$R = [Y, AY, A^2Y] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

أنظر المسألتين ٥ — ٦

مسائل محلولة

١ — برهن أن المصفوفة $C_q(p)$ الواردة فى (26.4) يكون لها $\{p(\lambda)\}^q$ كلا متغير تشابهى غير تافه وحيد .

لنفرض أن $C_q(p)$ من الدرجة s . إن مصغر العنصر الواقع فى الصف الأخير والعمود الأول من $\lambda I - C_q(p)$ هو ± 1 وهذا يكون القاسم المشترك الأعظم لكل المصغرات المربعة من الدرجة $(s-1)$ لـ $\lambda I - C_q(p)$ هو الواحد ، أى أن العوامل اللامتغيرة لـ $\lambda I - C_q(p)$ هى $1, 1, \ldots, 1, f_s(\lambda)$. ولكن $f_s(\lambda) = \{p(\lambda)\}^q$ وذلك لأن :

$$\phi(\lambda) = |\lambda I - C_q(p)| = |\lambda I - C(p)|^q = \{p(\lambda)\}^q$$

٢ — إن الشكل القانونى (ا) هو الشكل الوارد فى النظريتين I و II وإن العامل اللامتغير وغير التافه والقاسم الأولى هو $\lambda^4 + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda + 1$. إن الشكل القانونى الوارد فى النظرية III هو (ب) :

$$(ب)\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad (ا)\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

٣ — إن الشكل القانونى (ا) هو الشكل الوارد فى النظرية I حيث العوامل اللامتغيرة هى $\lambda + 2,\ \lambda^2 - 4,\ \lambda^3 + 3\lambda^2 - 4\lambda - 12$ والقواسم الأولية هى $\lambda + 2,\ \lambda + 2,\ \lambda + 2,\ \lambda - 2,\ \lambda - 2,\ \lambda + 3$. إن الشكل القانونى المتعلق بالنظريتين II و III هو (ب):

$$(ب)\ \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad (ا)\ \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

٤ — إن الشكل القانونى (ا) هو الشكل المتعلق بالنظرية III . إن القواسم الأولية على حقل الأعداد الجذرية هى $\lambda + 2,\ \lambda + 2,\ (\lambda^2 + 2\lambda - 1)^2,\ (\lambda^2 + 2\lambda - 1)^3$ وإن العوامل اللامتغيرة هى :

$$(\lambda + 2)(\lambda^2 + 2\lambda - 1)^2, \qquad (\lambda + 2)(\lambda^2 + 2\lambda - 1)^3$$

إن الشكل القانونى الوارد فى النظرية I هو (ب) أما الشكل الوارد فى النظرية II فهو (ﺟ)

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad (\text{ا})$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 0 & -10 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -11 & 12 & 17 & -14 & -21 & -8 \end{bmatrix} \qquad (\text{ب})$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -6 & 9 & 4 & -9 & -6 \end{bmatrix} \qquad (\text{ﺟ})$$

ه – لنفرض أن $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 & -1 & -6 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ ولنأخذ $X = [1, 0, 0, 0, 0, 0]'$.

فتكون عندها : $X, AX = [-2, 1, 1, 1, 1, 1]'$, $A^2 X = [1, 0, -1, 0, 0, -1]'$ $A^3 X = [-3, 1, 1, 1, 1, 2]$ متجهات مستقلة خطيا بينما $A^4 X = [1, 0, -2, 0, 0, -2]' = 2A^2 X - X$; أن X ينتمى إلى $\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1$ لنجرب $m(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1$ ولنكتب X_6 بدلا من X

إن المتجه $Y = [0, 0, 0, 1, 0, 0]'$ مستقل خطيا مع عناصر السلسلة المقادة بـ X_6 وأن $AY = [-1, 0, 1, -1, 1, 0]'$ مستقل خطيا مع Y ومع عناصر هذه السلسلة . والآن $A^2Y=Y$ أى أن Y ينتمى إلى λ^2-1 . بما أن كثيرى الحدود هذين يتّهان مجموعة العوامل اللامتغيرة وغير التافهة : فإننا نكتب X_5 بدلا عن Y

ونجد الشكل القانونى الجذرى لـ A :

$$R = [X_5, AX_5, X_6, AX_6, A^2X_6, A^3X_6] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad R^{-1}AR = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ملاحظة : إن المتجه $Z = [0, 1, 0, 0, 0, 0]'$ مستقل خطيا مع عناصر السلسلة المقادة بـ X_6 وأن $AZ = [3, 0, -2, 1, -2, 0]'$ مستقل خطيا مع Z ومع عناصر السلسلة ، من جهة ثانية : أن $A^2Z = [-1, 1, 0, 0, 0, 1]' = -AX_6 + A^3X_6 + Z;$

وهكذا يكون $(A^2-1)(Z-AX_6) = 0$ ويكون $W = Z - AX_6 = [2, 0, -1, -1, -1, -1]'$ منتميان إلى λ^2-1 . إذا اتخذنا هذا المتجه كـ X_5 فإنه يمكننا أن نكون مصفوفة أخرى R نحصل بواسطتها على الشكل القانونى الجذرى .

٦ – ليكن $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & -4 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$. ولنأخذ $X = [1, 0, 0, 0, 0]'$.

ينتج عما تقدم أن ، $X, AX = [-2, 1, -1, -1, -2]'$، $A^2X = [1, 1, -1, -1, 0]'$ مستقلة خطيا بينما $A^3X = 2A^2X - 3X = [-1, 2, -2, -2, 0]'$ وأن X ينتمى إلى $\lambda^3-2\lambda^2+3$ لنجرب كثير الحدود هذا ككثير حدود أدنى $m(\lambda)$ ولنأخذ X كـ X_5 .

عندما نطرح فى A العمود الرابع من العمود الأول فإننا نجد $[-1, 0, 0, 1, 0]'$; وإذا أخذنا بعد ما تقدم $Y=[1,0,0,-1,0]'$ فإنه يكون $AY=-Y$ ويكون Y منتميا إلى $\lambda+1$. وإذا طرحنا من جديد العمود الرابع فى A من عمودها الثالث فإننا نجــد $[0, 0, -1, 1, 0]'$; وإذا اتخذنا بعدما تقدم $Z = [0, 0, 1, -1, 0]'$. فإن $AZ = -Z$ وأن Z ينتمى إلى $\lambda+1$. بما أن Y و Z وعناصر السلسلة المقادة بـ X_3 تكون مستقلة خطيا فإننا نسمى Y كـ X_4 و Z كـ X_3 ونجد بعدها الشكل القانونى العادى لـ A

$$R = [X_3, X_4, X_5, AX_5, A^2X_5] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad R^{-1}AR = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

مسائل اضافية

٧ – اكتب المصفوفات القانونية الواردة فى النظريات I و II و III على حقل الأعداد الجذرية لكل مصفوفة من مصفوفات المسألة ٩ من الفصل ٢٥ :

أجوبة جزئية (ا) $\text{II, III, } \operatorname{diag}(1,2,3)$ $\quad \text{I, } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{bmatrix}$

(ب) $\text{I, II, III, } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(ه) $\text{II, III, } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}; \quad \text{I, } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

(و) $\text{II, III, } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{I, } \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(ز) $\text{III, } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad \text{II, } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}; \quad \text{I, } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

(ح) $\text{II, III, } \operatorname{diag}(2,2,2,-1,-1); \quad \text{I, } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

٨ – ما هى الشروط الواجب توافرها (ا) لكى يكون الشكلان القانونيان المتعلقان بالنظريتين I و II متطابقتين ؟ (ب) ولكى يكون الشكلان القانونيان الواردان فى النظريتين II و III متطابقين ؟ (ج) لكى يكون الشكل القانونى المتعلق بالنظرية II قطريا ؟

٩ – حقق الشكل القانونى $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ وقارنه مع جواب (ب) من المسألة ٨ .

١٠ – لنفرض أن للمصفوفة A غير الشاذة العوامل اللامتغيرة وغير التافهة .

(ا) $(b)\ \lambda^2+1,\ \lambda+1,\ \lambda^3+1,\ (\lambda^3+1)^2$. (ب) $\lambda^4+5\lambda^2+4,\ \lambda^6+6\lambda^4+9\lambda^2+4$.

اكتب لكل من هاتين الحالتين ، الأشكال القانونية الواردة فى النظريات I و II و III على حقل الأعداد الجذرية ومن ثم الشكل المتعلق بالنظرية IV .

جواب (أ)

$$\text{I.}\quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{II.}\quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{III.}\quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{IV.}\quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$$

حيث $\alpha, \beta = \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$

١١ – برهن أنه لمصفوفة مربعة A من الدرجة n ، إذا كان المتجه X منتميا إلى $g(\lambda)$ فإن $g(\lambda)$ تقسم $m(\lambda)$ كثير الحدود الأدنى لـ A

إرشاد : افرض العكس واعتبر $m(\lambda) = h(\lambda)\cdot g(\lambda) + r(\lambda)$.

١٢ – برهن فى المثال ٦ أن X ، AX ، Y مستقلة خطيا واختزل A إلى شكلها القانونى الجذرى .

١٣ – فى المسألة ٦ :

(١) خذ $Y = [0, 1, 0, 0, 0]'$ المستقل خطيا مع السلسلة المقادة بـ X_5 واستنتج أن $X_4 = Y - (3A - 2I)X_5$ منتم إلى $\lambda + 1$

(ب) خذ $Z = [0, 0, 1, 0, 0]'$ المستقل خطيا مع X_4 ومع السلسلة المقادة بـ X_5 واستنتج أن $X_3 = Z - X_5$ منتم إلى $\lambda + 1$

(جـ) احسب $R^{-1}AR$ مستعملا المتجهين X_3 و X_4 من (ب) و(١) لتكوين R .

١٤ – أوجد R لكل مصفوفة A من مصفوفات المسألة ٩ الفصل ٢٥ شرط أن تكون $R^{-1}AR$ الشكل القانونى الجذرى لـ A

١٥ – حل مجموعة المعادلات التفاضلية الخطية التالية :

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + t \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = -6x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 \\ \dfrac{dx_4}{dt} = -3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

حيث x_i دوال مجهولة للمتغير الحقيقى t

إرشاد : افرض $X = [x_1, x_2, x_3, x_4]'$. وعرف $\dfrac{dX}{dt} = \left[\dfrac{dx_1}{dt}, \dfrac{dx_2}{dt}, \dfrac{dx_3}{dt}, \dfrac{dx_4}{dt}\right]'$،

ومن ثم أعد كتابة المجموعة بالشكل التالى :

$$\frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ -6 & -2 & -3 & -2 \\ -3 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = AX + H \qquad \text{(i)}$$

بما أن التحويل الخطى غير الشاذ $X = RY$ يحول (i) إلى :

$$\frac{dY}{dt} = R^{-1}ARY + R^{-1}H$$

فاختر R بحيث تكون $R^{-1}AR$ هى الشكل القانونى الجذرى لـ A . إن المتجه الأولى E_1 ذا المركبات الأربعة المنتمى إلى $\lambda^3 - \lambda$ هو القائد للسلسلة $X_1 = E_1, AX_1, A^2X_1$ بينما E_4 يعطى $X_2 = E_4 - X_1 + 2AX_1$ الذى ينتمى إلى $\lambda + 1$
والآن باعتبار :

$$R = [X_1, AX_1, A^2X_1, X_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & 8 \\ 0 & -6 & 4 & -12 \\ 0 & -3 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

نجد

$$\frac{dY}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ y_1 + y_3 \\ y_2 \\ -y_4 \end{bmatrix}$$

ويكـون :

$$Y = \begin{bmatrix} C_1 + \frac{1}{2}t^2 \\ C_2e^t + C_3e^{-t} - t \\ -C_1 + C_2e^t - C_3e^{-t} - \frac{1}{2}t^2 - 1 \\ C_4e^{-t} \end{bmatrix}$$

و

$$X = RY = \begin{bmatrix} 2C_1 + C_2e^t + 3(C_3+C_4)e^{-t} + t^2 - 2t + 1 \\ 2C_1 + 2C_2e^t + 2(3C_3+4C_4)e^{-t} + t^2 - 4t + 2 \\ -4C_1 - 2C_2e^t - 2(5C_3+6C_4)e^{-t} - 2t^2 + 6t - 4 \\ -2C_1 - C_2e^t - 5(C_3+C_4)e^{-t} - t^2 + 3t - 2 \end{bmatrix}$$

GLOSSARY — قائمة بالمصطلحات

English	العربية
Ch. 1	**الفصل الأول**
Matri	مصفوفة
Coefficient matrix	مصفوفة المعاملات
Augmented	ممـدة
Elements	عناصر
Trace	أثـر
Conformable	متوافقـة
Order of a matrix	درجة مصفوفـة
Commutative law	قانون التبديل
Scalar	عـددى
Associative law	قانون جمع الحدود الجبرية – قانون ترتيب الحدود
Partitioning	تجزئـة
Ch. 2	**الفصل الثانى**
Types	أنماط – أنواع
Identity matrix	مصفوفة الوحدة
Triangular	مثلثى
Diagonal matrix	مصفوفة قطرية
Commulative	تبديليـة
Idempotent	متساوية القـوى
Nilpotent	معدومة القوى
Index	دليـل
Involutory	ملتفـة
Transpose	منقـول
Symmetric	متماثل
Skew	تخالفى – متخالف
Conjugate	مـرافق
Hermitian matrix	مصفوفة هيرميتية
Diroect sum	المجموع المباشر
Ch. 3	**الفصل الثالث**
Determinant	محـددة
Permutations	تباديل
Inver and ion	تعاكس
Odd	فـردى
even	زوجى

English	Arabic
Terms	حــدود
Minor	مصغــر
Cofactor	معامل مرافق
Algebraic complements	المتممات الجبرية
Complementary minors	المصغرات المتممة
Ch. 4	**الفصل الرابع**
Evaluation of determinants	حسابات المحددات
Expansion	مفكوك
Expansion along a row	الفك على طول صف
Derivative	مشتقــة
Ch. 5	**الفصل الخامس**
Equivalence	تكافــؤ
Rank of a matrix	رتبة مصفوفة
Singular	شــاذ
Non - singular	غير شاذ
Elementary transformations	التحويلات الأولية
Elementary row transformations	تحويلات صفوف أولية
Elementary column transformations	تحويلات أعمدة أولية
Inverse	معكــوس
Equivalent matrices	المصفوفات المتكافئة
Row equivalence	التكافؤ بالصفوف
Canonical matrix	مصفوفة قانونية
Normal form	الشكل العادى – الصيغة النظامية
Elementary matrices	مصفوفات أوليــة
Ch. 6	**الفصل السادس**
Adjoint matrix	المصفوفــة المرافقة
Ch. 7	**الفصل السابع**
Inverse of a symmetric matrix	معكوس مصفوفة متماثلة
Ch. 8	**الفصل الثامن**
Fields	حقول – مجالات
Of characteristic	ذو مميز
Subfield	حقل جزئى
Ch. 9	**الفصل التاسع**
Linear dependence	الارتباط الخطى
Linear independence	الاستقلال الخطى
Forms	صيغ – أشكال
Vectors	متجهات
Components	مركبــات

Zero vector	متجه صفرى
Linear combination	ائتلاف خطى
Linear form	صيغة خطية
Ch. 10	**الفصل العاشر**
Consistent	متسقة (غير متعارضة)
Inconsistent	غير متسقة — متعارضة
Homogeneous	متجانس
Trivial solution	حل تافه — حل غير هام
Ch. 11	**الفصل الحادى عشر**
Vector spaces	الفراغات الاتجاهية
Closed umder	مغلقة بالنسبة
Dimension	بعـــد
Spanned by	مولـــد بـ
Subspace	فـــراغ جزئى
Basis	أســـاس
Intersection	تقاطع
Nullity of a matrix	صفرية مصفوفـــة
Coordimates	احداثيـــات
Ch. 12	**الفصل الثانى عشر**
Ch. 13	**الفصل الثالث عشر**
Inner product	حاصل الضرب الداخلى
Orthogonal vectors	المتجهات المتعامدة
Unit vector	متجه الوحـــدة
Normalization	التعبـــير
Orthonormal	عيـــارى متعامد
Ch. 14	**الفصل الرابع عشر**
Ortho - normal	عيارى متعامـــد
Unitary transformation	التحول الواحدى
Ch. 15	**الفصل الخامس عشر**
Congruence	تطابق
Congruent	متطابقـــة
Index of the matrix	دليل المصفوفـــة
Signature of the matrix	شارة المصفوفـــة
Rank	رتبـــة
Skew - symmetric	متماثلة تخالفية
Conjunctive	مقترن (موجـــد)
Conjugate	مرافـــق

Ch. 16	**الفصل السادس عشر**
Bilinear Forme	الصيغ ثنائية الخطية
Rank of the matrix	رتبة المصفوفة
Canonical forms	الصيغ القانونية
Alternative	متناوب
Cogredient	الموافقة التغيير
Contragredient	مخالف التغيير
Factorable	قابل للتحليل لعوامل
Rational field	حقل الأعداد الجذرية
Minor	مصغر
Reciprocal	عكسى
Ch. 17	**الفصل السابع عشر**
Quadratic form	صيغة تربيعية (شكل تربيعى)
Cross terms	حدود تقاطعية
Equivalent	متكافئة
Invariant	لا متغير (ثابتة)
Congruent	متطابقة
(Law) of inertia	(قانون) القصور
Definite form	صيغة محددة
Semi - definite form	صيغة شبه محددة
Minors	مصغرات
Leading minors	مصغرات المتقدمة
Regular	منتظم
Reduction	اختزال
Distinct	متميز (مختلف)
Permanence	دوام أو ثبات
Variation	تغير
Ch. 18	**الفصل الثامن عشر**
Ch. 19	**الفصل التاسع عشر**
The characteristic equation	المعادلة المتميزة
Invariant	لا متغير
Characteristic polynomial	كثير حدود متميز
Characteristic roots	الجذور المميزة (الجذور الخاصة)
Eigenvalues	قيم خاصة
Eigenvectors	متجهات خاصة
Latent roots	جذور كامنة
Latent vectors	متجهات كامنة

Distinct	مختلفة – متميزة
Ch. 20	**الفصل العشرون**
Similarity	التشابه
Associated with	مصاحب لـ أو مرافق لـ
Multiplicity	تعـــدد
Dimension	بعـــد
Null	معـــدوم
Orthogonally similar	متشابهتان تعامديا
Unitarily similar	متشابهتان واحديا
Nullity	انعدامية (صفرية)
Ch. 21	**الفصل الواحد والعشرون**
Symmetric matrices	مصفوفات متماثلة
Distinct	مختلفة (متميزة) – متباينة
Multiplicity	تعـــددية
Unitarily similar	ذات تشابه واحـــدى
Normal	نظامى
Identity transformation	التحويل الذاتى (التحويل المحايد)
To normalize	جعله عيـارى
Augmented matrix	مصفوفة ممددة
Spectral decomposition	التحليل الطيفى
Ch. 22	**الفصل الثانى والعشرون**
Domain	نطاق أو مجـال
Polynomial	كثير حدود
Leading coefficient	المعامل المتقدم
Monic	واحـــدى
Irreducible	غير قابل للاختزال
Rational	جـــذرى
Greatest common divisor	قاسم مشترك أعظم
Uniqueness	وحدانيـــة
Ch. 23	**الفصل الثالث والعشرون**
Functional values	القيم الداليـــة
Matrix polynomials	كثيرات حدود مصفوفية
Right divisor	قاسم من اليمين
Left divisor	قاسم من اليسار
Proper	غير معتل
Improper	معتل
Ch. 24	**الفصل الرابع والعشرون**
Inverse	معكوس

Invariant	لا متغير
Distinct	متباينـــة
Monic	واحـــدى
Elementary divisor	قاسم أولى
Ch. 25	**الفصل الخامس والعشرون**
Similarity invariants	لامتغيرات تشابهية
Derogatory	متردية
Non-deogatorry	غير متردية
Companion	رفيق (زميل)
Nilpotent	معدومة القوى
Idempotent	متساوية القوى
Dimension.	بعد أو سعة
Ch. 26	**الفصل السادس و العشرون**
Rational canonical form	شكل قانونى جلدى
Chain	سلسلة
Leader	القائـــد
Ledy by	مقاد بـ